# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## 1. Формулы группы ХХ

| | | |
|---|---|---|
| $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $tgx \cdot ctgx = 1$ | $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ | $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ |
| $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi),\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | | |

## 2. Формулы группы 2Х Х

| | |
|---|---|
| $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ | $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ |
| $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ | $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ |
| $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ | $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ |
| $1\pm\sin x = 1\pm\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ | $1\pm\sin x = \sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\pm 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \left(\cos\dfrac{x}{2}\pm\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$ |

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

## 3. Формулы группы Х У

| | |
|---|---|
| $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ | $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ |
| $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ | $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ |
| $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ | $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ |
| $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$ | |
| $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ | $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ |

$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta} \qquad tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

## 4. Формулы группы $\pi$

| | |
|---|---|
| **Наименьший положительный период:** $T_0$(sin x; cos x)=2$\pi$ | $T_0$(tg x; ctg x)=$\pi$ . |
| **Чети-нечет:** **cos(-x)=cosx** sin(-x)=-sinx tg(-x)= - tgx ctg(-x)=-ctgx | |
| **Формулы приведения:** **Опускаем нечётные граничные углы** ($90^0$; $270^0$) $\Leftrightarrow$ функция **<u>меняется на кофункцию.</u>** **Опускаем чётные граничные углы** ($180^0$; $360^0$) $\Leftrightarrow$ функция **<u>не меняется</u>** (на кофункцию)<br><br>**Знак "+" или "-"** в начале ответа определяем в зависимости от "**<u>условной</u>**" четверти. | |
| **Частный случай:** **синус угла равен косинусу <u>дополнительного</u> угла (и т.д.)**<br>$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ , $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ Аналогичные формулы для косинуса, тангенса, котангенса. | |

| X = град | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ |
|---|---|---|---|
| **sin x** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **cos x** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tg x** $=\frac{\sin x}{\cos x}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{1}$ |
| **ctg x** $=\frac{\cos x}{\sin x}$ | $\frac{\sqrt{3}}{1}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

| | I | II | III | IV | $0^o$ | $90^o$ | $180^o$ | $270^o$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin x | **+** | + | - | - | **0** | 1 | 0 | -1 |
| cos x | **+** | - | - | + | **1** | 0 | -1 | 0 |
| tg x | **+** | - | + | - | **0** | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| ctg x | **+** | - | + | - | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 |

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

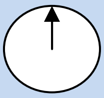
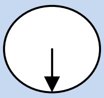
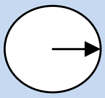
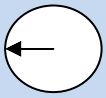
arcsin(- a)= - arcsin a    arctg (-a)= - arctg a

arcos(-a)= π - arccos a    arcctg (-a)= π - arcctg a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sin x = a | $x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$ | sin x = - a | $x=(-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$ | sin x = ±a | x= ± arcsin a +πn |
| cos x = a | x=± arccos a +2πn | cos x = - a | x=± (π - arccos a) +2πn | cos x = ±a | x=± arccos a +πn |
| tg x = a | x= arctg a +π n | tg x = - a | x= - arctg a +π n | tg x = ±a | x= ±arctg a +π n |
| ctg x = a | x= arcctg a +π n | ctg x = - a | x= π - arcctg a +π n | ctg x = ±a | x= ±arcctg a +π n |

**sin x = 0** ⇔ cos x = ±1 ⇔ tg x = 0 ⇔ x= πn

**cos x = 0** ⇔ sin x = ±1 ⇔ ctg x = 0 ⇔ x= π/2 + πn

sin x = 1  sin x = -1  cos x = 1  cos x = -1 

**Приводим тригонометрическое уравнение к стандартному виду (одинаковые аргументы)**

**(<u>формулы B или C</u>),**

**или по правилам <u>левой руки</u>.**

<table>
<tr><td>Показатели синуса-косинуса<br><br>(2;2;..1;1;…0)</td></tr>
<tr><td>Если в составе показателей есть (1;2), приводим <u>К СИНУСУ ИЛИ КОСИНУСУ</u>, в зависимости от наличия хорошего "<u>рабочего места</u>". $\sin^2 3x + \cos 3x = 0$</td></tr>
<tr><td>ОСТАЛЬНЫЕ ПРИВОДИМ К ТАНГЕНСУ.<br><br>0 степень - приводим к однородности 2 порядка<br><br>1 степень - возможен 2 способ через формулу доп. угла</td></tr>
<tr><td>Итак: (2; 2; 2;) или (1;1) - наличная однородность. (2; 2; 2;)+0 или (1;1)+0 - приводим к однородности 2 степени. $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$ $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 0$<br><br>$\sin^2 3x + 2\cos^2 3x + 3\sin 3x\cos 3x = 2$ $\sin x + \cos x = 1$</td></tr>
<tr><td>Второй способ: (1;1), а также (1;1)+0 формула доп.угла $\sin x + \cos x = 1$<br><br>Второй способ: (2;2)неполное либо разложение на множители, либо приведение <u>К СИНУСУ ИЛИ КОСИНУСУ</u> $\cos^2 x - 4\sin^2 x + 2,75 = 0$ $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$</td></tr>
</table>

**Правило левой руки:**

1) Ладонь (слева разложение на множители, справа нуль) $\sin 3x \cdot \cos 2x = \sin 3x$

2) Указательный палец указывает на введение t $(\sin x + 1)^2 - 3(\sin x + 1) - 4 = 0$

3) Большой палец требует понижения показателя степени (4; 6;…) **$\mathbf{Sin^4x - cos^4x = 0.5}$**

4) Три остальных пальца имеют в виду функциональные методы решения (D; E; перекрестная монотонность) $\sqrt{\sin x} = -\sin x$ $\sin x + \cos x = 3 + \sin^6 5x$ $0,5^x = x + 6$

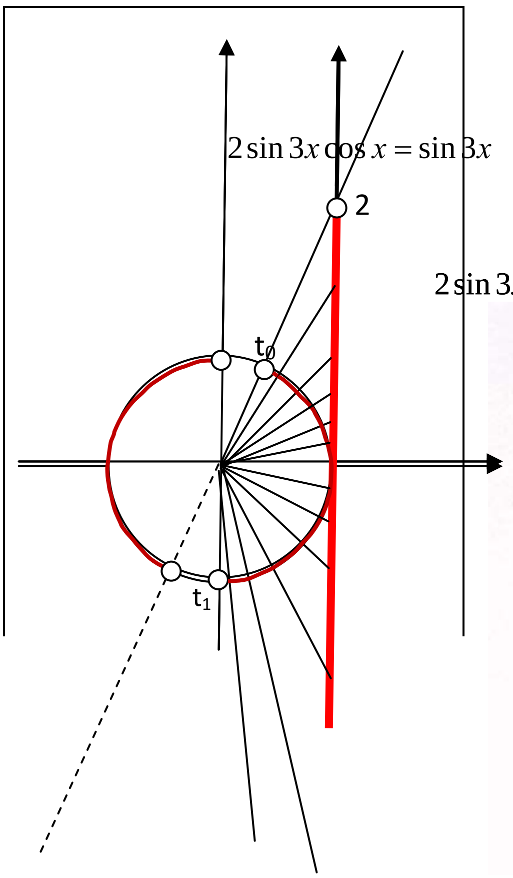
**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА:**

Приводим неравенство к простейшему виду. Например:

1. **На оси синусов, косинусов, тангенсов** выделяем промежутки заданные в неравенстве.
2. Проецируем их **на единичную окружность**.
3. Проводим **конечные стороны углов** и устанавливаем к ним **НАПРАВЛЕНИЯ**.
4. Вычисляем **конечные углы** (один - через арки, другой – через сложение-вычитание)
5. Записываем ответ, не забывая **про период**. Возвращаемся от $t$ к x.

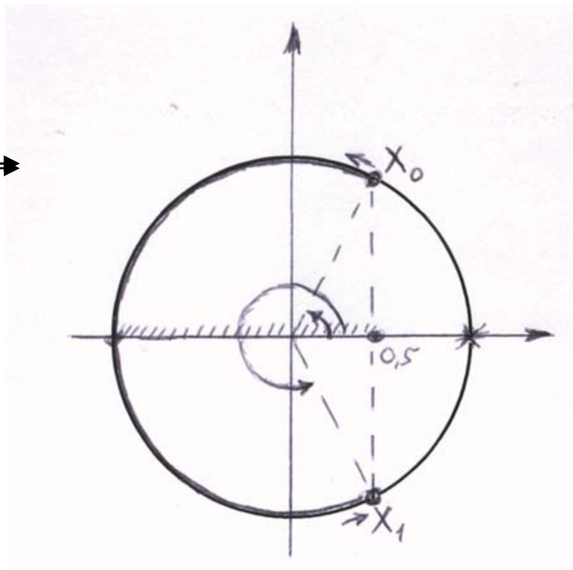
**Решить неравенство** $tg\frac{x}{2} < 2 \overset{t=\frac{x}{2}}{\Leftrightarrow} tgt < 2$

$\cos x \le 0,5$




$2\sin 3x \cos x = \sin 3x$

$2\sin 3x \cos x = \sin 3x$



**Формулы сокращенного умножения:**

| | |
|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| $a^2 + b^2$ **!** | $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ |
| $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ | $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 =$____________ | $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) =$_____________ |
| $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ | |

**Логарифмы**

| |
|---|
| **1.** $a^{\log_a b} = b,\ если\ a > 0,\ a \neq 1$ |
| **2.** $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ |
| **3.** $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ |
| **4.** $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ (вынесение – внесение показателей) |
| 5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ |
| **6.** $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ <br> **6.** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$, $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ |
| **7.** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ |

<table>
<tr>
<td>$a > 1$</td>
<td colspan="2">

**С учетом ОДЗ**

$$a^{f(x)} \Lambda a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \Lambda g(x)$$

$$\log_a f(x) \Lambda \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \Lambda g(x)$$

Знак неравенства сохраняется

</td>
</tr>
<tr>
<td>$0 < a < 1$</td>
<td colspan="2">

$$a^{f(x)} \Lambda a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \vee g(x)$$

$$\log_a f(x) \Lambda \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$$

Знак неравенства сохраняется на противоположный

</td>
</tr>
<tr>
<td>$a = 1$</td>
<td>

**Только для степеней**

$$1^{f(x)} > 1^{g(x)} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$1^{f(x)} \geq 1^{g(x)} \Leftrightarrow 1^{f(x)} = 1^{g(x)}$$ ($x \in$ D)

</td>
<td>

**Только для степеней**

$$1^{f(x)} < 1^{g(x)} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$1^{f(x)} \leq 1^{g(x)} \Leftrightarrow 1^{f(x)} = 1^{g(x)}$$ ($x \in$ D)

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

$$a(x)^{f(x)} \Lambda\, a(x)^{g(x)} \quad \overset{\text{с учетом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad [a(x)-1] \cdot [f(x)-g(x)] \Lambda 0$$

$$\log_{a(x)} f(x) \Lambda \log_{a(x)} g(x) \quad \overset{\text{с учетом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \quad [a(x)-1] \cdot [f(x)-g(x)] \Lambda 0$$

</td>
</tr>
</table>

## Прогрессия

$S_{(5,25)} = S_{25} - S_4$ ! ! !

### "Арифметическая прогрессия"

$a_1$ ; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$; $a_1 + 3d$; …

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$

$$a_m = a_n + d(m - n)$$

$$a_m + a_n = a_{m+k} + a_{n-k}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

### Геометрическая прогрессия

$a_1$ ; $a_1 q$; $a_1 q^2$; $a_1 q^3$; …

$a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \ldots$

$$a_m = a_n q^{m-n}$$

$$a_m \cdot a_n = a_{m+k} \cdot a_{n-k}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, если $|q| < 1$,

2,5(34)=2,53434343434…=2,5+ 0,034+0,00034+0,0000034+…=

$= 2{,}5 + \frac{0{,}034}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}034}{0{,}99} = \frac{34}{990} = \frac{25}{10} + \frac{34}{990} = \frac{25 \cdot 99 + 34}{990} = \ldots$

# ПРАВИЛА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

**1. для суммы, разности, произведения, частного**

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \qquad [ku(x)]' = k[u(x)]'$$

$$[uv]' = u'v + uv' \quad [uvz]' = u'vz + uv'z + uvz'$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**2. Для остальных двенадцати действий используем формулу производной сложной функции,**

$$f'(t(x)) = f'(t) \cdot t'(x)$$

## ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ

| $C' = 0$, | $x' = 1$ |
|---|---|
| $(x^n)' = nx^{n-1}$<br>**Показатель уменьшается на 1** | $[(kx+b)^n]' = kn(kx+b)^{n-1}$ |
| $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$<br>**Показатель не меняется** | $[a^{(kx+b)}]' = k \cdot \ln a \cdot a^{kx+b}$ |
| $[\ln x]' = \frac{1}{x}$<br>**Логарифм $\to$ инверсия** | $[\ln(kx+b)]' = k \cdot \frac{1}{kx+b} = \frac{k}{kx+b}$ |
| $[\sin x]' = \cos x$ | $[\sin(kx+b)]' = k \cdot \cos(kx+b)$ |
| $[\cos x]' = -\sin x$ | $[\cos(kx+b)]' = -k \cdot \sin(kx+b)$ |
| $[tgx]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ **Тангенс $\to$ квадратная инверсия знаменателя** | $[tg(kx+b)]' = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}$ |
| $[ctgx]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ **Котангенса $\to$ минус квадратная инверсия знаменателя** | $[ctg(kx+b)]' = -\frac{k}{\sin^2(kx+b)}$ |

## ПРАВИЛА ДЛЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

### 1. для суммы, разности, ~~произведения, частного~~

$$\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \qquad \int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**От произведения и от частного при интегрировании необходимо избавиться (за исключением трех формул в таблице)**

### 2. Для всех остальных действий используем формулу сложной функции

$$\int f(kx+b)dx = \frac{F(x)}{k} + C,$$

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

| | |
|---|---|
| **Первообразная взаимодействует либо: С СУММОЙ-РАЗНОСТЬЮ И КОЭФФИЦИЕНТОМ,**<br><br>**либо: со степенью, с синусом, косинусом, инверсией, квадратной инверсией синуса и косинуса + ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ.** | |
| $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$ | |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$<br>**Показатель растет на 1.** | **Степенная** функция (сложно-линейная)<br>$\int (kx+b)^n dx = \frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)} + C$, $k(n+1)$ - по вертикали |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$<br>**Показатель не изменяется.** | Показательная функция (сложно-линейная)<br>$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k\cdot\ln a} + C$; $k\cdot\ln a$ - по вертикали |
| ➔ $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ **Разрешимая дробь** | Логарифмическая функция в ответе<br>$\int \frac{dx}{kx+b} = \int (kx+b)^{-1} dx = \frac{\ln(kx+b)}{k} + C$; K - по вертикали |
| ➔ $\int \sin x\cdot dx = -\cos x + C$ | $\int \sin(kx+b)dx = -\frac{\cos(kx+b)}{k} + C$; K - по вертикали. |
| ➔ $\int \cos x\cdot dx = \sin x + C$ | $\int \cos(kx+b)dx = \frac{\sin(kx+b)}{k} + C$ k- по вертикали. |
| ➔ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ **Разрешимая дробь** | $\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{tg(kx+b)}{k} + C$ k- по вертикали. |
| ➔ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ **Разрешимая дробь** | $\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{ctg(kx+b)}{k} + C$ k- по вертикали. |

**Определенный интеграл:**

$$\int_2^4 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4}\right) - \left(\frac{2^4}{4}\right) = 64 - 4 = 60$$

**Тангенс угла наклона касательной:**

$$f'(x_0) = tg\varphi(x_0) = k(x_0)$$

**Уравнение касательной:**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

**Формула нахождения площади:**

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ для обобщенной криволинейной трапеции

$S = \int_a^b f(x)dx$ для криволинейной трапеции

**Закон движения, скорости, ускорения:**

***X(t)***

$$v(t) = x'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

$x(t) = \int v(t)dt$ либо $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

$v(t) = \int a(t)dt$ либо $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$

Подробнее смотри ниже

## Проценты:

1. $35\% \Rightarrow 0{,}35\cdot$ база
2. На $35\%$ больше $\Rightarrow 1{,}35\cdot$ база
3. На $35\%$ меньше $\Rightarrow 0{,}65\cdot$ база
4. **Сплавы. Начальные** смеси записать физической матрицей $\Rightarrow$ произвести над матрицами "**физические**" операции. $\Rightarrow$ Составить уравнение с помощью **конечных** смесей.

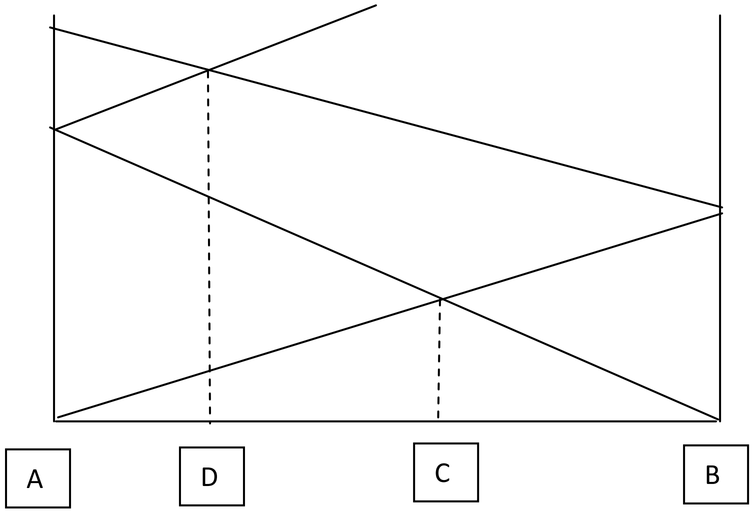
# РАЗДЕЛ 2

## (1) ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ И РАБОТУ

По условию задачи и по чертежу (используя и ключевые слова условия) составляем устно или письменно:

1) Затем используем **одномерные формулы** для : $V$ ;
2) Затем используем **одномерные формулы** для: $t$ ;
3) Затем используем **одномерные формулы** для: $S(AB; BC; ...)$ .
4) Используем **треугольные формулы** для всех времен.
5) По окончании нахождения списка величин **составляем уравнение(ия) из неиспользованных величин.**

Задача. Два туриста вышли одновременно из А в В и из В в А. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 км. от В, на обратном пути они снова встретились в 6 км. от А через 6 часов после первой встречи. Найти расстояние между А и В и скорости обоих туристов.




Дано:

1/ BC=12 км

2/ AD=6 км

3/ $t_{1AC}=t_{2BC}$ / 1-ое ур-ие встречи/

4/ $t_{1CB}+t_{1BD}=6$

5/ $t_{2CA}+t_{2AD}=6$/ 2-ое ур-ие встречи

6/AC+CB=AD+DB

| V | t **(записать все из условия)** | S |
|---|---|---|
| $V_1 = x$ (1) | $t_{1AC}$ **(6)** | **AC= (5)** |
| $V_2$ **(8)** | $t_{2BC}$ **(7)** | BC=12 |
| $V_1 = x$ (1) | $t_{1BC} = \frac{12}{x}$ **(2)** | BC=12 |
| $V_1 = x$ (1) | $t_{1BD} = 6-\frac{12}{x}=\frac{6x-12}{x}$ **(3)** | **BD= (4)** |
| $V_2$ Перенос | $t_{2AC}$ (10) | AC= (11) |
| $V_2$ Перенос | $t_{2AD}$ **(9)** | AD=6 |

**(12) Уравнение из (11).**

**Серым обозначены величины, найденные из треуг. формул. Желтым - найденные из "дано" .**

**Все использовано, значит, некая величина найдена дважды: (11)=(5)**

## (2) ЗАДАЧИ НА ЦИФРЫ:

Например. X – цифра единиц, 2X – 3 – цифра десятков, У –цифра сотен. После чего составляется само число: $100 \cdot Y + 10 \cdot (2X - 3) + 1 \cdot X$

## (3) ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ:

**Сначала можно** перейти к дробным показателям. При приведении к общему знаменателю (горизонталь) и для сокращения дробей (вертикаль), необходимо числитель//знаменатель, … **разложить на множители**

- При вынесении общего множителя нужно привести показатели **к общему знаменателю**, и выносить степень с **НАИМЕНЬШИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ**.

$$a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{4}} - 2a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{4}}b^{-\frac{3}{12}} - 2a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{4}{12}} = a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{4}{12}}\left(a^{\frac{9}{4}}b^{\frac{1}{12}} - 2\right)$$

- При использовании формул сокращенного умножения нужно сравнивать числитель со знаменателем (вертикаль) или знаменатель со знаменателем (горизонталь) и раскладывать по формуле сокращенного умножения выражение с **НАИБОЛЬШИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ (в 2 раза одна формула, в 3 раза - другая)**

- $$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \qquad \frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}$$

## (4) МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ:

1. Приводим неравенство к стандартному виду (слева **произведение/частное** сомножителей, справа -нуль)
2. **Сокращаем** знакопостоянные множители, **избавляемся** от корней, модулей, логарифмов, показательных функций.
3. Раскладываем оставшиеся сомножители **на линейные множители**.
4. Находим **нули/полюса** и их кратность
5. Расставляем на оси знаки **+ или –.**
6. **Штрихуем промежутки и выделяем концы**, в соответствии со знаком неравенства.

| Вид сомножителя | Что делать |
|---|---|
| $(+)$ | Сократить на множитель |
| $\oplus$ | $\oplus \leftrightarrow \oplus^2$ |
| $\oplus - \oplus$ | $\oplus - \oplus \leftrightarrow \oplus^2 - \oplus^2$ |
| $a^{f(x)} - a^{g(x)}$<br>$\log_a f(x) - \log_a g(x)$ | $\leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))$<br>**с учетом ОДЗ** |

1. **Примеры сократимых**: $8$; $2^{x-2}$; $(x^2+1)$; $(x^2-2x+3)$; $(\sqrt{x-2}+1)$ ; $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})$; $(|x-2|+1)$; $(|x-2|+\sqrt{x})$; $2^{x-2}+3^x$; $\begin{cases}\sqrt{x-2}\cdot(////)>0\\ x>3\end{cases}$
2. **Примеры** $\oplus$: $\sqrt{x-2}$; $|x-2|$
3. **Примеры:** $\oplus - \oplus$ (ОДНОВРЕМЕННОЙ В НУЛЬ НЕ ОБРАЩАЮТСЯ): $(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$;
   $(\sqrt{x-2}-1)$;
   $(|x-2|-|x|)$ ; $(|x-2|-1)$; $(|x-2|-\sqrt{x})$

4. **Если слагаемые ОДНОВРЕМЕННО ОБРАЩАЮТСЯ В НУЛЬ (**например, при x=3**), то нужно поступить так:**
   $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+6}$ **типа** $\oplus$ **, ТО ВЫНОСИМ ОБЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ:**
   $\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sqrt{(x-2)(x-3)}$ = $=\sqrt{|(x-1)(x-3)|}+\sqrt{|(x-2)(x-3)|}$
   = $\sqrt{|x-1||x-3|}+\sqrt{|x-2||x-3|} = \sqrt{|x-3|}(\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2|})$
   **С первым сомножителем поступаем как с одиночным корнем** $\oplus$ **, а на второй сомножитель-скобку** $(+)$ **можно сократить.**
   **Еще пример:**
   $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6| = |(x-1)(x-3)|+|(x-2)(x-3)| = = |x-3|(|x-1|+|x-2|)$

**С первым сомножителем поступаем как с одиночным корнем** $\oplus$ **, а на второй сомножитель-скобку** $(+)$ **можно сократить.**

(5) **ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА:**

При решении уравнений нужно:

- Уединить корень. $\sqrt{66-x}-3x=2 \Leftrightarrow \sqrt{66-x}=3x+2 \Rightarrow$
- Возводить обе части в степень. $66-x=9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 9x^2+13x-62=0 \Leftrightarrow$
- При возведении в четную степень **могут появиться посторонние корни**. Поэтому необходимо **проверить** каждый найденный корень.

**Второй способ решения предполагает принять один из корней за t.**

$\sqrt{x+13}-\sqrt{x-3}=2$;

$t=\sqrt{x+13} \Rightarrow t^2=x+13 \Leftrightarrow x=t^2-13$

$t-\sqrt{t^2-13-3}=2$

При решении <u>неравенств с четными корнями</u> (или уравнений, корни которых тяжело проверяются) нужна система условий, не допускающая появления посторонних решений.

- В систему включается (1) само неравенство, (2) ОДЗ (3) **знаковое требование**.
- Если знаковых требований несколько, то получаем **совокупность** нескольких систем.
- В той совокупности, где левая и правая части неравенства **неотрицательны**, обе части неравенства **возводятся в четную степень** и знак неравенства не меняется.

  Другие совокупности решаются методом подбора (возможны два ответа: **пустое множество, любое допустимое число**)

$$\overset{\oplus}{\sqrt{x-2}} \ge \overset{\oplus -}{8-x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \overset{\oplus}{\sqrt{x-2}} \ge \overset{\oplus}{8-x} \\ x-2 \ge 0\ (ОДЗ) \\ 8-x \ge 0\ (случай\,1) \end{cases} \\ \begin{cases} \overset{\oplus}{\sqrt{x-2}} \ge \overset{-}{8-x}\ (выполнено) \\ x-2 \ge 0\ (ОДЗ) \\ 8-x < 0\ (случай\,2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

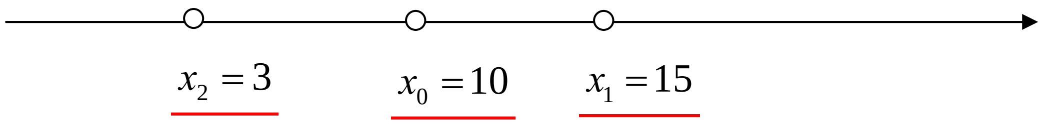
## (8) МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПЕРВООБРАЗНОЙ

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **КОРОТКО** | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ |
| **ПОДРОБНО** | $x(t_0)$ | $x(t_1)$ | $x(t_2)$ | $v(t_0)$ | $v(t_1)$ | $v(t_2)$ |
| **Две точки - краткой формы нет** | $x_1(t_0)$<br>$x_2(t_0)$ | $x_1(t_1)$<br>$x_2(t_1)$ | $x_1(t_2)$<br>$x_2(t_2)$ | $v_1(t_0)$<br>$v_2(t_0)$ | $v_1(t_1)$<br>$v_2(t_1)$ | $v_1(t_2)$<br>$v_2(t_2)$ |

**Момент t и положение точки** X связаны уравнением движения: $x = x(t)$ или $x = f(t)$.

**Длительность и смещение** находятся по формулам: $|t_2 - t_1|$ и $|x_2 - x_1|$,

Смещение–расстояние–путь




Точка движется из $x_0 = 10$ в точку $x_1 = 15$ и обратно в точку $x_2 = 3$

**Смещение** равно: $x_2 - x_0 = 3 - 10 = -7$

**Расстояние** смешения равно: $|x_2 - x_0| = |3 - 10| = |-7| = 7$

**Путь** равен: $|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = 5 + 12 = 19$

**Внимание:** $\textit{Расстояние} = |\textit{смещение}|$

**Путь = расстоянию** смещения, если движение происходит в одном направлении.

**Спуск**

$$v(t) = x'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

**Подъем**

**Положение** $x(t) = \int v(t)dt$ ( + начальные условия $x_0$ = M)

**Закон скорости:** $v(t) = \int a(t)dt$ ( + начальные условия $v_0$ = N)

**Смещение:** $x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

**Изменение скорости**: $v(t_1) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt$ ;

**Начало движения** это не t=0, а V=0

**Одновременно:** Какие-то моменты времени нужно приравнять или обозначить одним символом. Например: $t_1 = t_2$ Например: $t_0$ и $t_0$

**Одновременно в одной точке**: $x_1(t_0) = x_2(t_0)$

**В одну сторону:** Если скорости в указанный момент (в указанной точке) не равны нулю, то это означает, что $V_1$ и $V_2$ в выбранные для них моменты времени (в выбранных точках) имеют одинаковые знаки. Если хотя бы одна из скоростей окажется нулевой, то её нужно заменить ускорением в тот же момент времени (или сместить момент времени вперед на бесконечно малую величину).

**Встретились: Уравнение встречи типа:** $t_{1AC} = t_{2CB}$ **;** $t_{1AC} > t_{2CB}$ на некоторую величину C.

# (9)E-D:

**D=ОДЗ для аргумента**

**E=ОДЗ для значений функции.**

* (1) **деление**: $\frac{a}{b}$. Требование: $b \neq 0$

* (2) **корень** четной степени: $\sqrt[2n]{a}$. Требование: $a \geq 0$

* (3) **логарифм**: $\log_b a$ Три требования: $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$

---

- (4) **арксинус и арккосинус:** $\arcsin a; \arccos a. \textit{Требование}: -1 \leq a \leq 1$
- (5) **тангенс**: $tga \quad \textit{Требование}: \quad \cos a \neq 0$
- (6)**котангенс** $ctga \quad \textit{Требование}: \quad \sin a \neq 0$

---

- **(7) Опасная функция: показательная:** $a^{f(x)}$ **Требование:** $a > 0$
- **(8) Опасная функция: степенная функция с рациональным показателем. Она сначала приводится к корневому виду, а затем определяется ООФ. Например:** $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ **Методом виртуального перебора получаем: x>0**

**Чтобы найти D, по количеству опасных действий составляется СИСТЕМА**

ДЛЯ НАХОЖДЕНИЕ Е ТАБЛИЧНЫМ СПОСОБОМ (Х должен встречаться 1 раз)

1. **Смещение:** $[3;\,5]+4=[7;\,9]$

2. **Растяжение** $-2[-3;\,2]=[6;\,-4]=[-4;\,6]$  $\frac{1}{2}[4;8)=[2;4)$

3. **Деление:** $\frac{1}{[-2;3]}=\frac{1}{[-2;-0)\cup(+0;3]}=[-0{,}5;-\infty)\cup(+\infty;\frac{1}{3}]=$

4. **Квадрат, четная степень:** $[-2;3]^2=[-2;0]^2\cup[0;3]^2=[0;4]\cup[0;9]=[0;9]$

**Куб, нечетная степень (МОНОТОННОСТЬ):** $[-2;3]^3=[-8;27]$

5. **Квадратный корень, корень четной степени:** $\sqrt{[-4;+9]}=\sqrt{[0;+9]}=[0;3]$

**Кубический корень, корень нечетной степени (МОНОТОННОСТЬ):** $\sqrt[3]{[-1;+8]}=[-1;+2]$

6. **Показательная функция (МОНОТОННОСТЬ, см. ГРАФИК);**

$2^{[-2;3]}=[\frac{1}{4};8]$; $2^{(-\infty;4)}=(0;16)$; $0{,}5^{[-2;3]}=[4;1/8]=[0{,}125;\,4]$

7. **Логарифм(МОНОТОННОСТЬ, см. ГРАФИК):**

$\log_2[-4;32]=\log_2(+0;32]=(-\infty;5]$

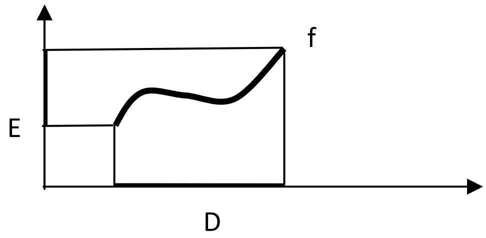
$\log_{0..5}[-4;32]=\log_{0.5}(+0;32]=(+\infty;-5]=$

8. **Тригонометрические функции:** $\sin(-\infty;+\infty)=[-1;+1]$; $\cos(-\infty;+\infty)=[-1;+1]$;

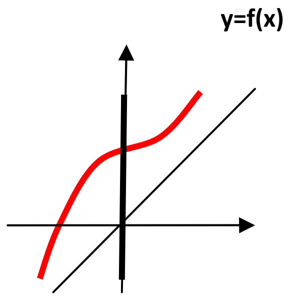
$tg(-\infty;+\infty)=(-\infty;+\infty)$; $ctg(-\infty;+\infty)=(-\infty;+\infty)$

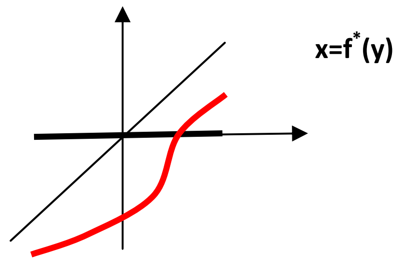
**Табличный способ**
**Графический способ (график квадратичной функции)**
**С помощью производной (критические точки)**

# Графики




**Теорема: Монотонная (возрастающая или убывающая функция) обратима.**

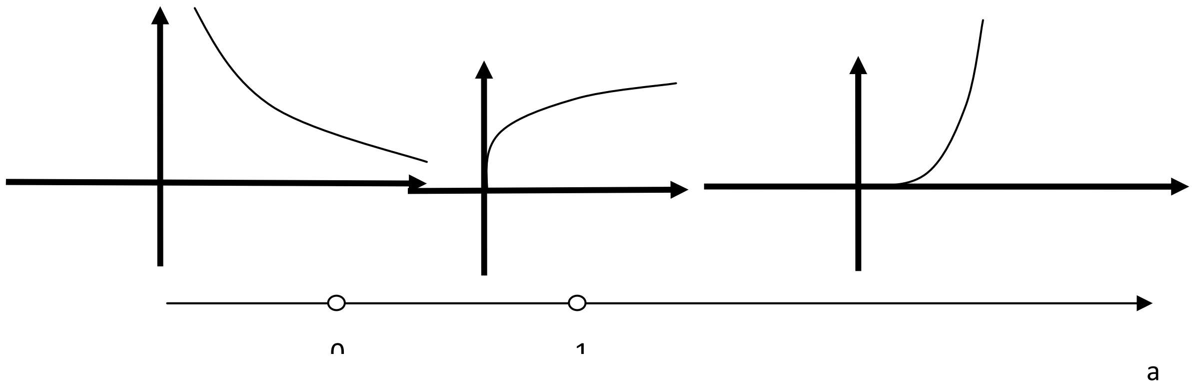



**E(f)=D(f*)** **Т.е. при замене функции на обратную D и E меняются местами**

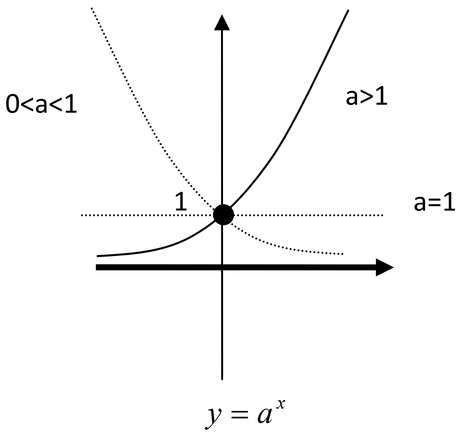
1. **Степенные функции** $y = x^a$

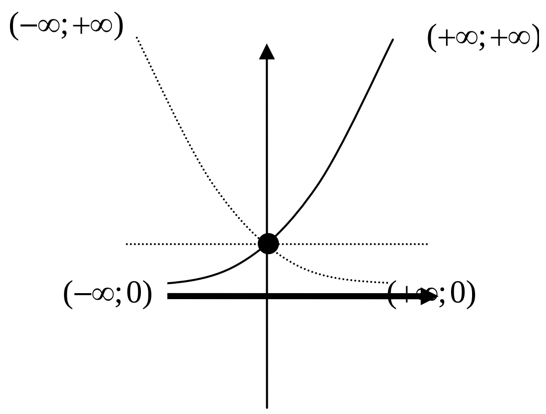
**КАСАНИЕ!!!!**




$y = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{чет-нечет}{ОДЗ}}$ Например: $y = x^{\frac{4}{3}} \to \frac{чет}{(-\infty;+\infty)}$, $y = x^{\frac{3}{5}} \to \frac{нечет}{(-\infty;+\infty)}$, $y = x^{\frac{3}{4}} \to \frac{----}{[0;+\infty)}$

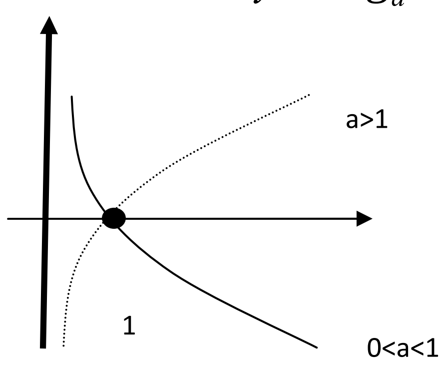
2. **Показательная функция**: $y = a^x$ Три случая: $a > 1; \quad a < 1; \quad a = 1.$



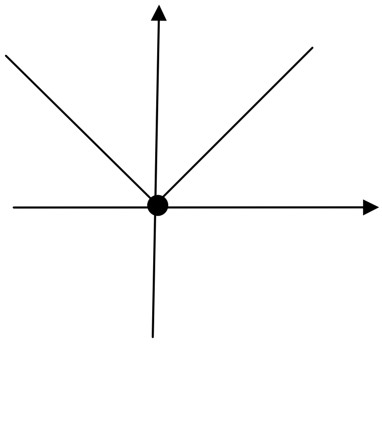




3. **Логарифмическая функция**:

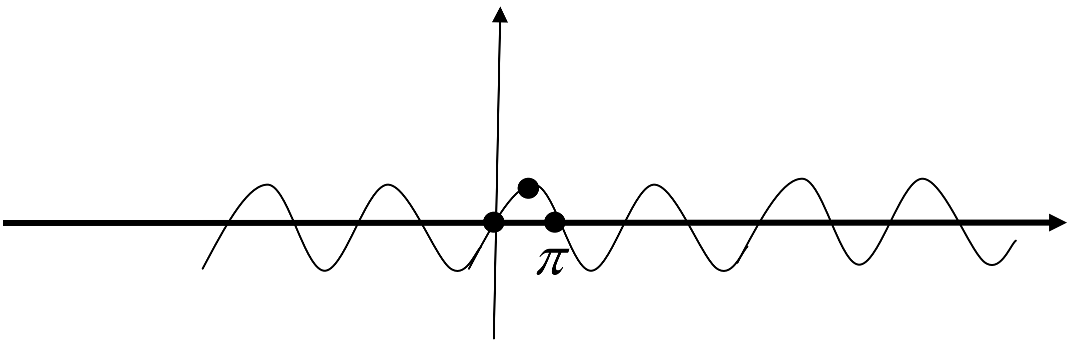
$$y = \log_a x$$



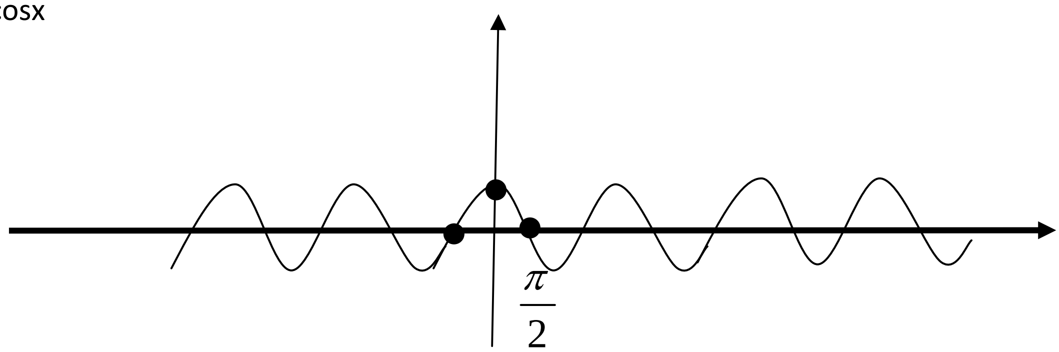

4. $y = |x|$



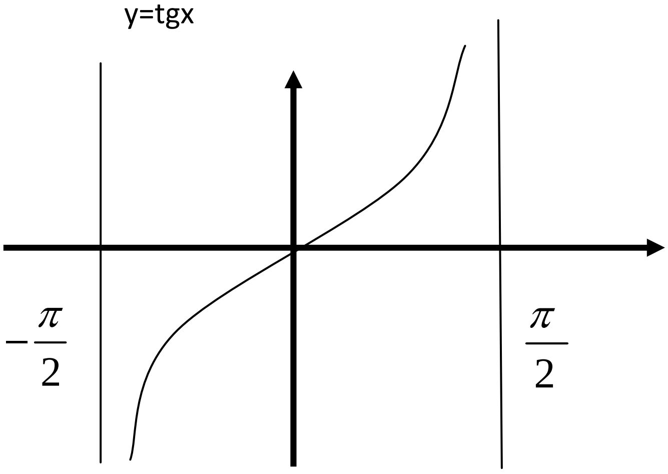
5. Тригонометрические функции: y=sinx



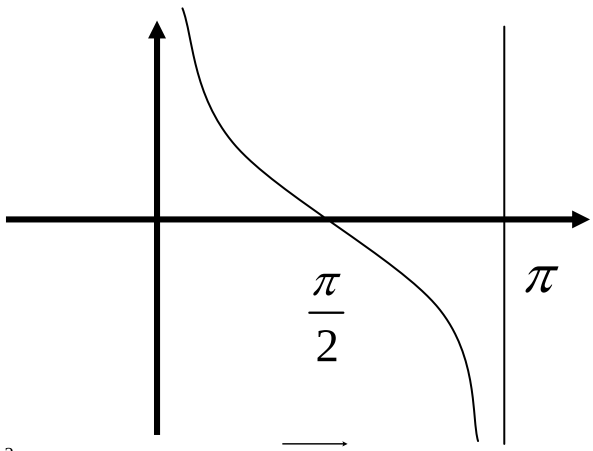

y=cosx




y=tgx




y-ctgx

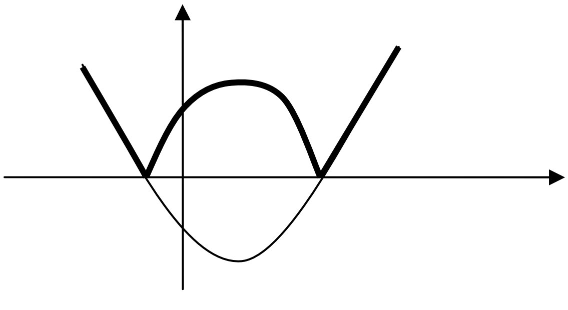



**Например:** $y=(x-2)^2+3$ получается из графика $y=x^2$ смещением на вектор $\overrightarrow{(2;3)}$

**Внешний модуль.** График $y=|f(x)|$ получается из графика $y=f(x)$ по схеме: **берем модули от всех ординат (от высот точек графика)**

$$\begin{cases} f(x)\ge 0, \textit{то график } y=|f(x)| \textit{принимает вид} \quad y=f(x) \\ f(x)<0, \textit{то график } y=|f(x)| \textit{ принимает вид} \quad y=-f(x) \end{cases}$$

Верхняя полуплоскость неподвижна. Нижняя зеркально отражается от оси абсцисс.

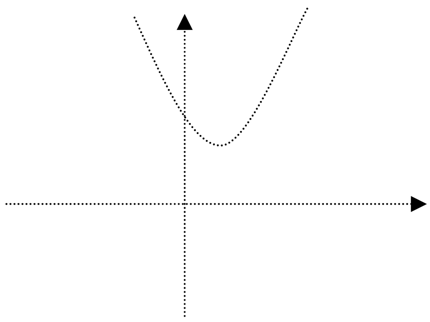


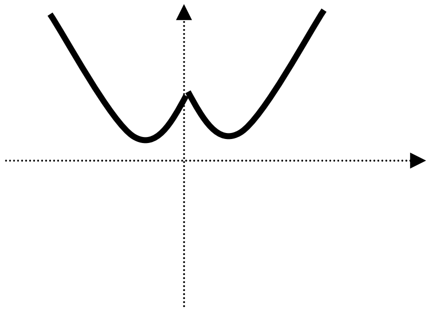
**Внутренний модуль**

Можно рассуждать так:

$y = f(|x|)$ совпадает с $y = f(x)$ при $x \geq 0$ (**правая полуплоскость неподвижна)**

$y = f(|x|)$ - четная функция. (**левая полуплоскость исчезает, на её место приходит зеркальное отражение от оси У**)





## МОДУЛИ:

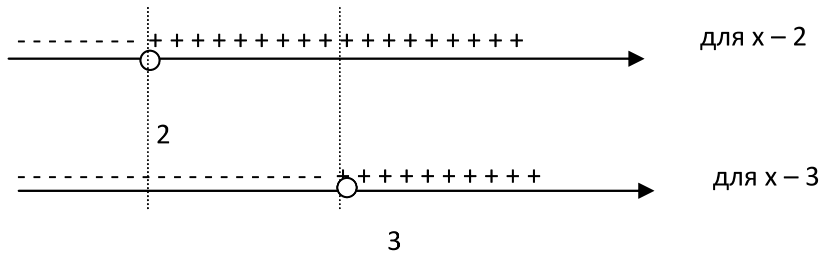
1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = \pm a$ (если $a \geq 0$). В случае, если $a < 0$, **уравнение решений не имеет.**
2. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$, если $a$ **положительно**.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$, если $a$ **положительно**.
4. $|x - c| < a$, ($a > 0$). Имеем: $x \in (c - a; c + a)$. ПЛЕЧИ!

   $|x - c| > a$, ($a > 0$)Имеем: $x \in (-\infty; c - a) \cup (c + a; +\infty)$. **КРЫЛЬЯ!** **Два модуля. Весы.**

5. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$
6. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) > 0$. Далее: разложить на множители и решать методом интервалов.
7. $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow -a < f(x) < a$. Аналогично пункту "5".
8. **Ввод нового параметра:** Например: $x^2 - 3|x| - 2 > 0$. Так как $x^2 = |x|^2$, то получим: $|x|^2 - 3|x| - 2 > 0$. Принимая $t = |x|$, получим : $t^2 - 3t - 2 > 0$ И.т.д.

9. **Решить уравнение:** $|x-2|+|x-3|=5$

По количеству модулей построим оси: два модуля и две оси для их **подмодульных** выражений.

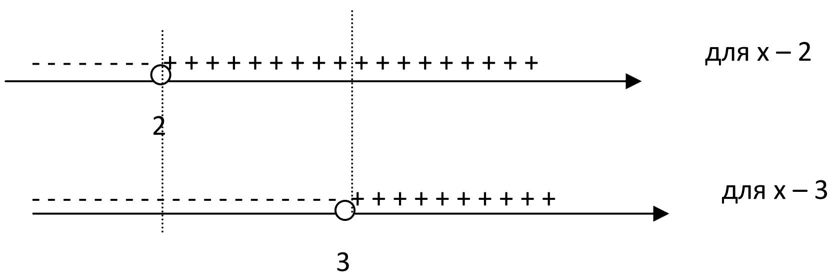



Имеем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ -(x-2)-(x-3)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\le x\le 3 \\ (x-2)-(x-3)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x>3 \\ (x-2)+(x-3)=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

Аналогично с неравенствами.

**30. Построить график:** $y=|x-2|+|x-3|$

По количеству модулей построим оси: два модуля и две оси для их **подмодульных** выражений.




**По традиции запись систем осуществляется в строчку, а совокупность записывается через случаи.**

**То есть:**

$Если\; x<2, то\;\; y=-(x-2)-(x-3)$

$Если\; 2\le x<3, то\;\; y=(x-2)-(x-3)$

$Если\; x>3, то\;\; y=(x-2)+(x-3)$

## ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ:

**Квадратичная функция** имеет вид: $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$

При a=0, квадратичная функция вырождается в **линейную**: $y = 0x^2 + bx + c,\ т.е.\ y = bx + c.$

**Например**, $y = (a^2 - 4)x^2 + ax + 4(a-1)$,

где A= $a^2 - 4$ ; B= $a$ ; C= $4(a-1)$ является квадратичной функцией при $a \neq \pm 2$ .

При a=2, a = - 2 получаем линейные функции: y=2x+4 и y = - 2x-12.

---

$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$ $\quad y = a(x+m)^2 + n$ $\quad$ y=a(x – $x_1$)(x –$x_2$)

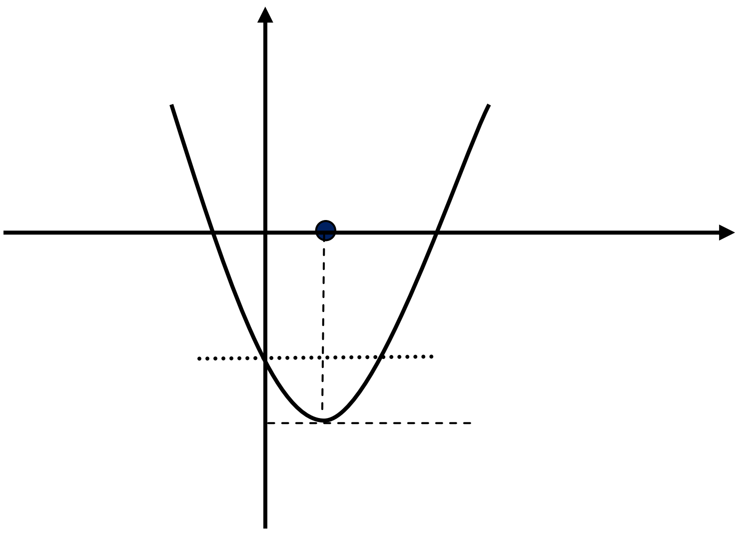
1. **Вершина:**

   **Абсцисса:** $y'(x_v) = 0$ или $x = -\dfrac{b}{2a}$ или (-- m; n) или $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

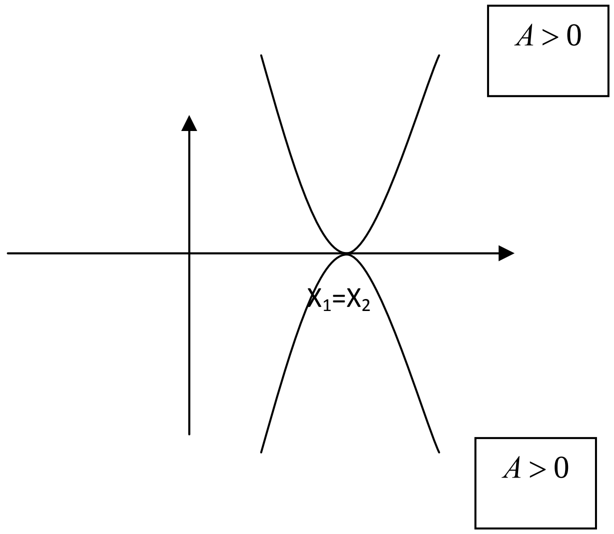
   **Ордината**: $y(x_v)$

2. **Точка пересечения с осью X.** При $D \geq 0$ это точки с абсциссами $x_1$ и $x_2$ .
   При $D < 0$ график либо выше оси X, либо ниже - с осью не пересекается.

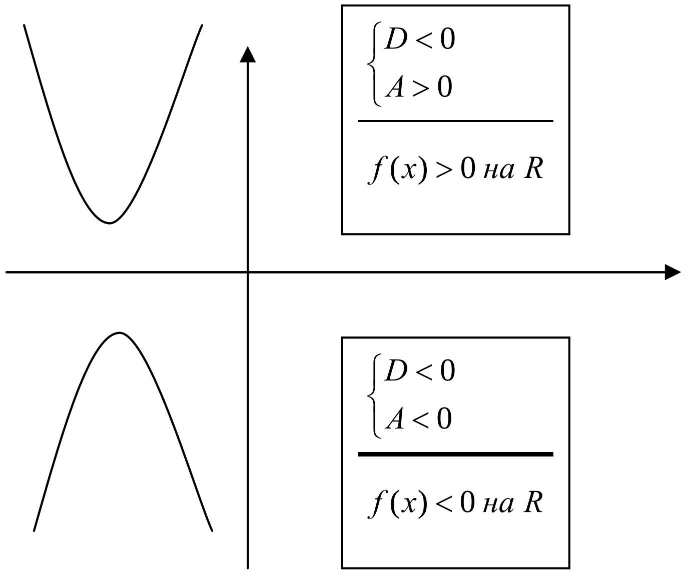
3. **Точка пересечения с осью y**: (0; c)



$$D=0$$




$$D<0$$




## Функция знакопостоянна

Если D<0, то квадратичная функция **знакопостоянна** При этом, если A>0, то квадратичная функция принимает положительные значения на всей числовой прямой. Если A<0, то квадратичная функция принимает отрицательные значения на всей числовой прямой.

**ТЕОРЕМА ВИЕТА:** $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$

Если в квадратном уравнении (трехчлене) $D\geq 0$, то $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$

Если уравнение пи веденное (a=1), то $\begin{cases} x_1\cdot x_2=c \\ x_1+x_2=-b \end{cases}$

Обратная теорема: если $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$, то $x_1$ и $x_2$ - корни квадратного уравнения.

## ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ:

1. При каких значениях параметра уравнение не имеет корней:

- 1 случай, $A \neq 0$. Составляем и решаем систему: $\begin{cases} A \neq 0 \\ D < 0 \end{cases}$

- 2 случай, $A = 0$. Решаем данное уравнение и найденные значения параметра подставляем в **исходное** уравнение. Исследуем, является ли решение полученного линейного уравнения пустым множеством.

2. При каких значениях параметров уравнение имеет хотя бы один корень.

- 1 случай. $A \neq 0$.Решаем аналогично предыдущему, только $D < 0$ заменяем на $D \geq 0$

- 2 случай. $A = 0$. Решаем аналогично предыдущему. Исследуем, имеет ли полученное линейное уравнение хотя бы один корень.

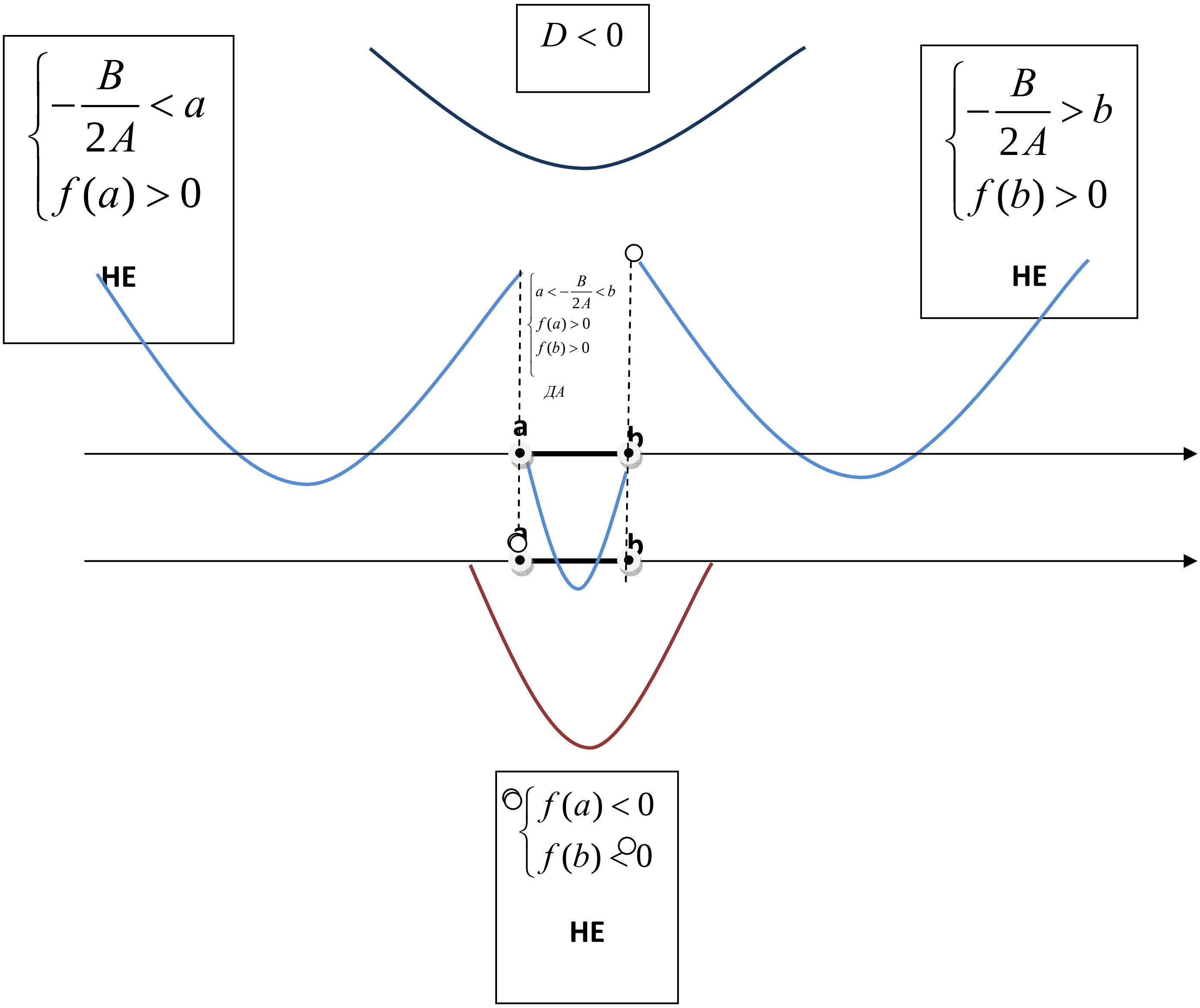
3. При каких значениях параметра, корни уравнения отрицательны?

- $A \neq 0$. Составляем и решаем систему: $\begin{cases} A \neq 0 \\ D \geq 0 \\ \dfrac{C}{A} > 0 \\ \dfrac{B}{A} < 0 \end{cases}$

- $A = 0$. Решаем данное уравнение и найденные значения параметра подставляем в **исходное** уравнение. Исследуем, являются ли корни полученного линейного уравнения положительными.

4. Аналогично решаются все подобные задачи.

5. Пусть, например, корни квадратичного уравнения $x^2+(2a-3)x+a-1=0$ существуют, но не принадлежат промежутку (3;10]. (см. язык "пять" пункта"7").



# СТЕРЕОМЕТРИЯ

**Равноапофемная (прямая) пирамида**: апофемы равны $\Leftrightarrow$ высота опускается в центр вписанной окружности $\Leftrightarrow$ боковые грани равнонаклонены к плоскости основания

**Равнобокая пирамида**: боковые ребра равны $\Leftrightarrow$ высота опускается в центр описанной окружности $\Leftrightarrow$ боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания

## ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ТЕЛ:

| | | |
|---|---|---|
| $S_{бок} = P_{осн} H$ | $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} h_{бок}$<br>$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \varpi}$ | $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\, h_{бок}$<br>$S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varpi}$ |
| $V = S_{осн} H$ | $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ | $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ |
| **Прямая призма(цилиндр)** | **Правильная пирамида(конус)** | **Правильная усеченная пирамида (конус)** |

## ДЛЯ НАКЛОННЫХ ТЕЛ:

| | | |
|---|---|---|
| $S_{бок} = P_{\perp} l$ | Находить площадь каждой боковой грани в отдельности – и результаты суммировать. | Находить площадь каждой боковой грани в отдельности – и результаты суммировать. |
| $\begin{cases} V = S_{осн} H \\ V = S_{\perp} L \end{cases}$ | $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ | $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ |
| **призма(цилиндр)** | **пирамида(конус)** | **усеченная пирамида (конус)** |

<table>
<tr><th></th><th>СФЕРА - ШАР</th><th>ВПИСАННЫЙ ШАР<br><br>Шар радиуса R вписан в фигуру с объемом V и полной поверхностью $S_{полн}$</th></tr>
<tr><td>$S$</td><td>$S = 4\pi R^2$</td><td rowspan="2">$V = S_{полн} \cdot R$<br><br>Отсюда<br><br>$R = \dfrac{V}{S_{полн}}$</td></tr>
<tr><td>$V$</td><td>$S = \dfrac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
</table>

**Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений**

Площадь $S_{орт}$ ортогональной проекции фигуры F с площадью S и наклоненной к плоскости проектирования под углом $\varphi$, равна:

$$S_{орт} = S \cdot \cos\varphi$$

**Косинус угла между плоскостями равен:**

1. Косинусу линейного угла
2. Косинусу угла между нормалями
3. $\cos\varphi = \dfrac{S_{орт}}{S}$

**Расстояние между скрещивающимися прямыми равно:**

1. Длине общего перпендикуляра
2. Расстоянию между опорными плоскостями (параллельными плоскостями, проходящими через данные прямые)
3. Расстоянию от одной прямой до опорной плоскости второй

## ТРЕУГОЛЬНИК

1. $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$

2. $S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ca\sin\beta}{2}$

3. Формула Герона: $S = \sqrt{\rho(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)}$, где $\rho = \frac{a+b+c}{2}$

4. $S = \rho r$, Формула обобщается на любой описанный вокруг окружности многоугольник.

5. $S = \frac{abc}{4R}$

1. Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
2. Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
3. Нахождение **радиуса**: $r = \frac{S}{\rho}$
4. Нахождение **радиуса**: $R = \frac{abc}{4S}$, $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, $2R = \frac{b}{\sin\beta}$, $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$
5. Нахождение **высоты**: Через теорему Пифагора или $h_a = \frac{2s}{a}$
6. Стороны треугольника обратно пропорциональны опущенным на них высотам:

   $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$

7. Свойства биссектрисы: Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (в центре вписанной окружности). Биссектриса делит сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:
8. Свойства **медианы**: Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (в центре тяжести тр-ка). Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины: x+2x=3x. Медиана треугольника равна половине диагонали параллелограмма. Причем: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, откуда и находится соответствующая диагональ, если известны все стороны треугольника. Медиана делит треугольник на **две равновеликие** части.
9. Свойство **серединных перпендикуляров**: Серединный перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке ( в центре описанной окружности)
10. Свойства **средней линии**: Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

## ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ Т РЕУГОЛЬНИК

1. $S = \frac{ab}{2}$
2. Теорема косинусов (теорема Пифагора): $c^2 = a^2 + b^2$
3. Нахождение **радиуса**. Радиус вписанной окружности равен половине гипотенузы (а **центр находится в середине гипотенузы**, гипотенуза есть диаметр)
4. Свойства высоты: $a^2 = cc_a$, $b^2 = cc_b$, $h^2 = c_a c_b$
5. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы

## РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{R}{2} =$ $h = 3r = \ldots$ (сравни: $R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $R_6 = \frac{a}{\sqrt{1}}$)

## ТРАПЕЦИЯ

$S = \frac{a+b}{2}h$; $S = \textit{средняя линия} \cdot h$

***Средняя линия*** $= \frac{a+b}{2}$

В **равнобедренную трапецию** ***вписана окружность***:

$a + b = 2\,\textit{боковых стороны},\mathrm{H} = 2r$

## ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. $S = ah_a = bh_b$

2. $S = ab\sin\gamma$

3. $S = \frac{d_1 d_2 \sin D}{2}$; Эта формула обобщается на любой четырехугольник

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

## РОМБ

1. $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

2. $S = \rho r$ (для всех описанных около окружности многоугольников, в том числе и для ромбов)

## КВАДРАТ

$S = a^2$

$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (сравни: $R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $R_6 = \frac{a}{\sqrt{1}}$)

$r = \frac{1}{2}a$

## ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

1. $S = \rho r$ (для всех описанных около окружности многоугольников)

2. $S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^0}{n}$

Для правильного треугольника: $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Для правильного четырехугольника: $S_4 = a^2$

Для правильного шестиугольника: $S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

1. $R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $R_6 = \frac{a}{\sqrt{1}}$
2. Внешний угол = Центральный угол = $\frac{360^0}{n}$;
3. Внутренний угол = $180^0$ – Внешний угол = $180^0$ - $\frac{360^0}{n}$
4. Внутренний угол = $\frac{\sum внутр.углов}{n}$ = $\frac{180^0(n-2)}{n}$

## ВПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

1. **Суммы противоположных сторон равны:** $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$
2. $S = \rho r$

## ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ

| | |
|---|---|
| $S = \pi R^2$<br>$S_{сектор} = \frac{1}{2} lR$<br>$S_{сектор} = \frac{\pi R^2}{360^0} n^0 = \frac{\pi R}{360^0} n$<br>$S_{сектор} = \frac{R^2}{2}\ \omega$ (рад) | $C = 2\pi R$<br>$l = \frac{2\pi R}{360} n$<br>$l = R\omega$ (рад) |
| **Произведение отрезков одной ходы равно произведению отрезков другой хорды**<br>**Произведение секущей на её внешнюю часть есть величина постоянная и равна квадрату касательной.** | |

## УГЛЫ

1. Треугольник: $\Delta = 180^0$ $\Delta_{внешн} = 360^0$
2. Многоугольник: $\Delta = 180^0 (n-2)$;
3. Правильный многоугольник

Внешний угол = Центральный угол = $\frac{360^0}{n}$;

Внутренний угол = $180^0$ – Внешний угол = $180^0$ - $\frac{360^0}{n}$

Внутренний угол = $\frac{\sum внутр.углов}{n}$ = $\frac{180^0 (n-2)}{n}$

4. Вписанный многоугольник:
Суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны

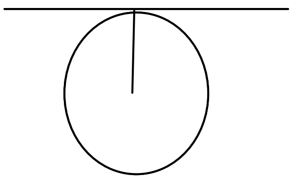
5. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается

6. Вписанный угол равен половине опорной дуги.

# КАСАТЕЛЬНЫЕ

1. Отрезки **касательных** от общей точки до точки касания **равны**.

2. Радиус, проведенный в точку **касания**, **перпендикулярен** касательной. **Перпендикуляр**, опущенный из центра окружности на касательную, попадает в точку **касания**.



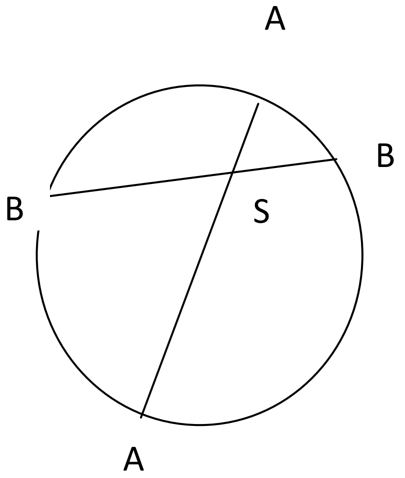
3. **Центр** окружности, **вписанной** в угол, лежит на **биссектрисе** угла и **равноудален** от касательных.

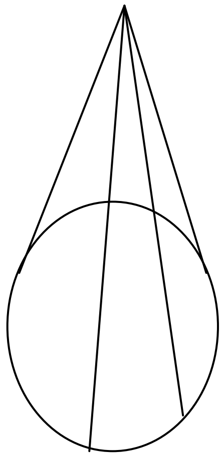
   **Центр** окружности , **вписанной** в многоугольник (в несколько углов), лежит на пересечении **биссектрис** его углов.

4. Центр окружности, **описанной** около отрезка, лежит **на серединном перпендикуляре** к отрезку

5. Центр окружности, **описанной** около многоугольника, лежит на пересечении **серединных перпендикуляров** к его сторонам.

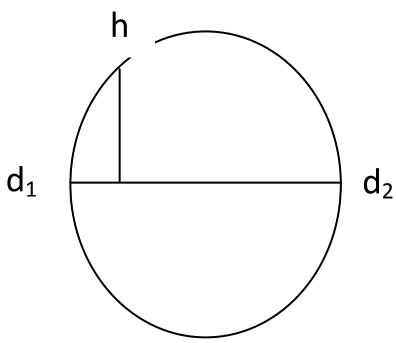
ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ



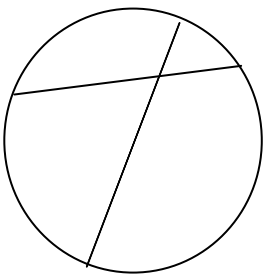
$$SA_1 \cdot SA_2 = SB_1 \cdot SB_2$$

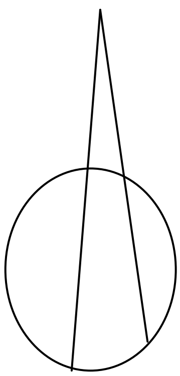
---

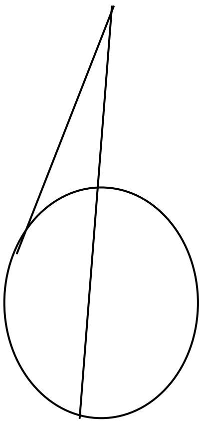


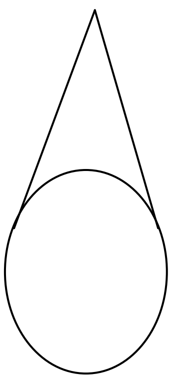

$$h^2 = d_1 d_2$$

---









$\boxed{\angle 1 = \dfrac{\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD}}{2}}$ $\boxed{\angle 1 = \dfrac{\overset{\smile}{AB} - \overset{\smile}{CD}}{2}}$ $\boxed{\angle 1 = \dfrac{\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{AB}}{2}}$ $\boxed{\angle 1 = \dfrac{\overset{\smile}{AMB} - \overset{\smile}{AB}}{2}}$

# Повторение

**Решить уравнение. Сначала выберите те уравнения, которые можно решить по правилу левой руки**

1) $2\cos 2x + \cos 6x = 0$

1a) $\cos 2x + \cos 6x + \cos 4x = 0$

2) $2\sin^2 2x - 1 = 0$

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$

4) $\sin 2x + 6\cos 2x = 7 + x^2$

5) $4\sin^2 x - \sin 2x = 0$ (найти корни из промежутка $[\pi; 2\pi)$

6) $\sin x - \cos x + 1 = 0$

7) $\sin x - 4\cos x = 0$

8) $3\sin^2 x + \sin 2x = 4$

9) $2\sin 2x - 1 < 0$

**10)Вычислить при x=16, y=81**

$$\left(\frac{2\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}} - x - y\right) : \frac{y - x}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}};$$

**Решить неравенство (уравнение, систему)**

11) $(x^2 - 6x + 9)(x - x^3)(4 + x^2)(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 2x + 3) \geq 0 \ (\leq 0)$

12) $\dfrac{x}{6 - x} \leq 0$

13) $4|3 - x| \cdot (1 - x)(|x| + |x^2 + x|)(\sqrt{x} - |x|) \geq 0$

14) $\dfrac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})\sqrt{x}}{(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4})(2 - x^2)} \leq 0$

15) $\dfrac{\log_{0.5}(x-1)\cdot\log_x(x-1)\cdot(\log_2 x-2)}{(\log_2 x+2)\sqrt{\log_2 x}}\ge 0$

16) $2^x(2^x-8)(x^{x-1}-1)(2^x-2^{x-1})(2^x+8)\le 0$

**17)** $\log_{0.5}(x-1)>2$

18) $\log_x(x-1)>2$

**19)** $0,5^{\sqrt{x}}>0,5^{\sqrt{x+2}}$

20) $(x-1)^{x^2}>x-1$

20a) $2^{x-3}=14-2x$ $2^{x-3}<14-2x$

**21)** $\dfrac{1}{2}\log_{0,5}(2x-1)\le 1-\log_{0,5}\sqrt{x-9}$

22) $4^x-3^{x-0.5}=3^{x+0.5}-2^{2x-1}$

**22a)** $4^x-7\cdot 2^x+10=0\ (<0)$

**23).** Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 60% меди?

**24)** Свежие грибы содержат по весу 80% воды, а сухие - 12% воды, Сколько получится сухих грибов из 200 кг свежих грибов?

**25)** Стоимость товара повысилась на 10;%. Затем понизилась на 25%. НА сколько и в какую сторону изменилась стоимость товара?

**26)** $\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x-8}=1$ (без соблюдений условий)

27) $\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x-8}>1$

**Найти область изменения функции:**

**28)** $\sin^2 x-6\sin x+10$ При каких значениях x эта функция принимает наименьшее значение?

29) $\dfrac{x-5}{x-4}$

**30)** $2\log_{0,5}(x^2-2x+2)-1$

**31)** $0,5^{\frac{1}{x^2+1}}$

**32)** Решить уравнение

$|x^2-1|=3$

Решить неравенство

33) $|x^2-1|<3$

34) $\left|x^2-1\right|>3$

Найти область определения.

35) $\dfrac{\sqrt{\lg(x-1)}}{\log_{x-1}x-1}$

36) $\dfrac{\sqrt{x}}{\arcsin 2x-0,5}$

37) $\dfrac{\sqrt{\log_{0,5}x}}{\sqrt{4-x}}$

38) $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{8-x}}$

Найти первообразную

39) $\int(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2})dx$

41) $\int\left(\sqrt{1-2x}+\frac{4}{\sqrt{1-2x}}\right)dx$

42) $\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$

43) $\int\frac{3\cdot dx}{2\cos^2 3x}$ Найти первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{12};2,5\right)$

44) $\int\frac{5\cos(3x-\frac{\pi}{4})}{2}dx$

45) $\int(2^{1-x}+\frac{e^{1-x}}{2})dx$

Найти интеграл

46) $\int_0^1(3x^2+2x+1)dx$

**Найти производную**

47) $(3x^2+2x+1)'$

48) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)'$

**49)** $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)'$

**50)** $\left(\sqrt{1-2x}+\frac{4}{\sqrt{1-2x}}\right)'$

**51)** $\left(\frac{5\cos(3x-\frac{\pi}{4})}{2}\right)'$

**52)** $\left(2^{1-x}+\frac{e^{1-x}}{2}\right)'$

**53)** $\left(2\sin 3x+2\sin^2 3x\right)'$

**54)** $\left((x^2-2x)^4\right)'$

**55)** $\left(x^2\cdot\sin\frac{x}{4}\right)'$

56) $\left(tg3x+\frac{\ln x}{x}\right)'$

**57)** $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'$

**58)** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$ и $y=4x$

**Построить график функции**

59) $y=2\sin\frac{x}{2}$

**60)** $y=x^2-2x-3$

61) $y=-(x-2)(x+4)$

**62)** $y=-(x-2)^2+4$

**63)** $y=\sqrt{x-2}-2$

64) $y=-\frac{2}{(x-3)^2}-1$

65) $y=2^{2-x}-1$

66) $y=\log_{0,5}(x-2)-1$

67) $y=\left|-(x-2)^2+4\right|$

68) $y=-(|x|-2)^2+4$

**69)** Точка движется по координатной прямой по закону: $x(t)=2t^4-8t+4$, где $x(t)$ - координата точки в момент времени t (время - в секундах, расстояние в метрах). Определить ускорение точки в момент начала движения. Определить месторасположение точки в момент начала движения и направление движения в начальный момент времени. Определить скорость точки в момент t=2с.

**70)** Расстояние между точками 10 метров. Они начинают двигаться одновременно по прямой навстречу друг другу. Скорость первой точки $v_1(t)=\left(t^2-4t\right)\frac{м}{c}$, второй - $v_2(t)=\left(-t^2+5t-4\right)\frac{м}{c}$. Найдите расстояние между точками через 1 секунду после начала движения.

71) Цифра единиц на 3 меньше цифры десятков двузначного числа. Число, записанное в обратном порядке теми же цифрами меньше исходного числа на 27. Найти исходное число.

72) Спортсмен в первую минуту пробежал 400 метров, а в каждую следующую минуту он пробегал на 20 метров меньше, чем в предыдущую. За сколько минут он пробежит 1800 метров

**73)** Найти угловой коэффициент касательной, проведенной через точку пересечения графика функции $f(x)=x^3-6x+3$ с осью ординат. Под каким углом касательная наклонена к оси ОХ а)под острым? Б) под прямым? В) под тупым? **Напишите уравнение этой касательной**

74) Найти тангенс угла наклона касательных к графику функции $y=x^2+x-2$ в точках пересечения с осью ОХ.

75) из города А в город В , расстояние между которыми 205 км, выехал автобус. Через 15 минут навстречу ему из В в А выехал мотоциклист и встретил автобус через 1 час после выезда. С какой скоростью ехал автобус, если его скорость на 20км/ч больше скорости мотоциклиста?

76) Моторная лодка отправилась по реке от одной пристани до другой и через 2,5 ч вернулась обратно, затратив на стоянку 15 минут. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч, а расстояние между пристанями 20км.

77) Две снегоуборочные машины, работая вместе, могут очистить определенную территорию от снега за 4 ч. Если бы сначала первая машина выполнила половину работы, а затем её сменила вторая, то на всю уборку снега ушло бы 9 ч. За какое время может очистить от снега эту территорию каждая машина в отдельности?

78) Два типографских работника вместе набрали на компьютере 65 страниц, причем первый работал на 1 час больше, чем второй. Однако второй набирает в час на 2 страницы больше, чем первый, и поэтому он набрал на 5 страниц больше. Сколько страниц в час набирает каждый сотрудник?