Решить систему: $\begin{cases} 2^{2x+1} - 9\cdot 4^{\frac{x}{2}} - 18 \le 0 \\ \log_x x^3 - 8\cdot\log_6 x + 1 \le 0 \end{cases}$

Укажем в системе ОДЗ $\begin{cases} 2^{2x+1} - 9\cdot 4^{\frac{x}{2}} - 18 \le 0 \\ \log_x x^3 - 8\cdot\log_6 x + 1 \le 0 \\ x > 0 \\ x^3 > 0 \\ x \ne 1 \\ x > 0 \end{cases}$

Упростим систему. В первом неравенстве приведем показательные функции к одному основанию.

$$\begin{cases} 2^{2x+1} - 9\cdot 2^{x} - 18 \le 0 \\ 3\log_x x - 8\cdot\log_6 x + 1 \le 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

В первом неравенстве приведем показательные функции к одному показателю

$$\begin{cases} 2\cdot 2^{2x} - 9\cdot 2^{x} - 18 \le 0 \\ 3 - 8\cdot\log_6 x + 1 \le 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot\left(2^{x}\right)^2 - 9\cdot 2^{x} - 18 \le 0 \\ -8\cdot\log_6 x \le -4 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Вводим для первого неравенства новую переменную.

$$t = 2^x \quad 2\cdot t^2 - 9\cdot t - 18 \le 0 \quad 2(t-6)(t+1,5) \le 0 \quad -1,5 \le t \le 6$$

$$\begin{cases} -1,5 \le 2^x \le 6 \\ 8\cdot\log_6 x \ge 4 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Упрощаем первое неравенство, учитывая, что $-1,5 \le 2^x$ выполнено на всех допустимых значениях x.

$$\begin{cases} 2^x \le 6 \\ \log_6 x \ge \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Далее:

$$\begin{cases} 2^x \le 2^{\log_2 6} \\ \log_6 x \ge \dfrac{1}{2}\cdot \log_6 6 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \quad \text{Т.е.} \quad \begin{cases} 2^x \le 2^{\log_2 6} \\ \log_6 x \ge \log_6 \sqrt{6} \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \quad \text{Т.к. } 6>1 \quad \begin{cases} x \le \log_2 6 \\ x \ge \sqrt{6} \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$$

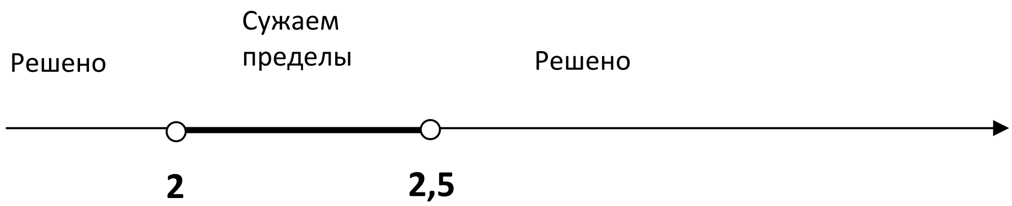
Нижние соотношения следуют из второго неравенства

$$\begin{cases} x \le \log_2 6 \\ x \ge \sqrt{6} \end{cases}$$

Для дальнейшего решения, произведем сравнение: $\log_2 6 \wedge \sqrt{6}$

НАЧНЕМ С КОРНЯ (корень-ведущий, логарифм - ведомый).

1. **<u>Первая оценка корня</u>**: $2 < \sqrt{6} < 2,5$ т.е. $\sqrt{6} \in (2; 2,5)$.
2. **<u>Проверим эти пределы 2 и 2,5 для логарифма</u>**: Если логарифм окажется за этими пределами, задача **решена**. Если внутри промежутка, то **сузим** пределы для $\sqrt{6}$.



- $\log_2 6 \wedge 2$ т.е. $\log_2 6 \wedge \log_2 4 \overset{2>1}{\Leftrightarrow} 6 \wedge 4$ т.к. $6 > 4$ то $\log_2 6 > 2$ $\quad \log_2 6 \in (2; ...)$
- $\log_2 6 \wedge 2,5$ т.е. $\log_2 6 \wedge \log_2 2^{2,5} \overset{2>1}{\Leftrightarrow} 6 \wedge 2^{2,5} \overset{6>0;2^{2,5}>0}{\Leftrightarrow} 6^2 \wedge 2^5 \Leftrightarrow 36 \wedge 32$

  Но $36 > 32$, значит, $\log_2 6 > 2,5$. Т.е. $\log_2 6 \in (2,5; ...)$

3. **Сопоставляя** $\sqrt{6} \in (2; 2,5)$ и $\log_2 6 \in (2,5; ...)$, получим: $\sqrt{6} < \log_2 6$
4. ПОСЛЕ РАБОТЫ НА ОСИ ПОЛУЧАЕМ: $[\sqrt{6}; \log_2 6]$