(1) Решить уравнение $(3\cos 2x - 5\cos x + 4)\cdot \ln(-tgx) = 0$

(2) Найти решения этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

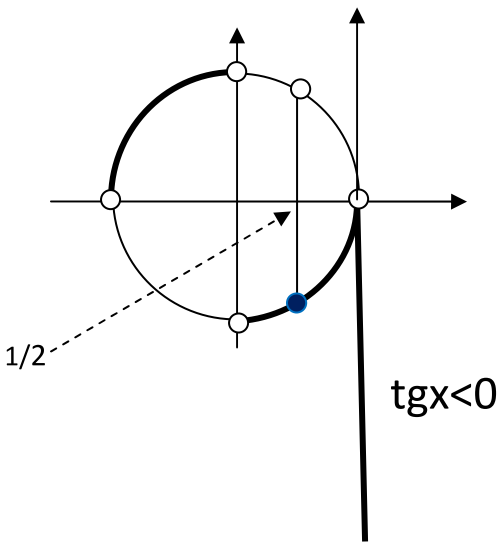
ВЫПОЛНЕНИЕ ПЕРВОГО ПУНКТА:

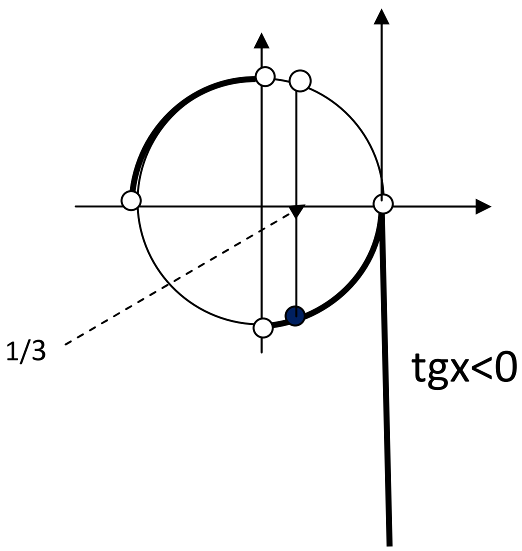
$$(3\cos 2x - 5\cos x + 4)\cdot \ln(-tgx) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (3\cos 2x - 5\cos x + 4)\cdot \ln(-tgx) = 0 \\ -tgx > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3\cos 2x - 5\cos x + 4)\cdot \ln(-tgx) = 0 \\ tgx < 0 \\ \cos x \neq 0\ (\textit{следстие второго соотношения}) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3\cos 2x - 5\cos x + 4 = 0 \\ tgx < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(-tgx) = 0 \\ tgx < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0 \\ tgx < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(-tgx) = 0 \\ tgx < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \\ tgx < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -tgx = 1 \\ tgx < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ tgx < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = \frac{1}{3} \\ tgx < 0 \end{cases} \\ tgx = -1 \end{array}\right.$$

Для решения систем, входящих в совокупность, переходим к единичным окружностям:





Выбирая значения X, для которых $tgx<0$, имеем:

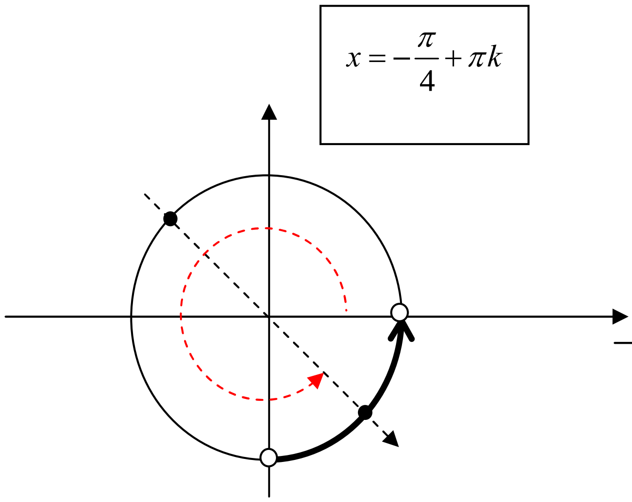
$$\left[\begin{array}{l} x=-\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi n \\ x=-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi m \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n \\ x=-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi m \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k \end{array}\right.$$

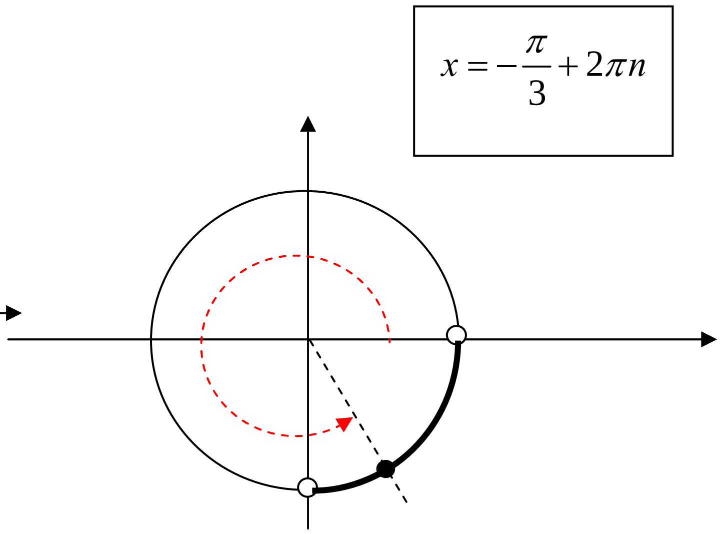
Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$; $x=-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi m$ где $m;n;k\in Z$

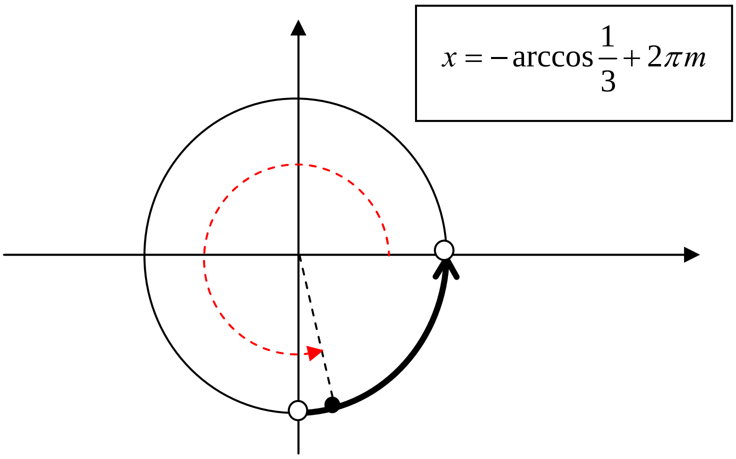
ВЫПОЛНЕНИЕ ВТОРОГО ПУНКТА:

1 СПОСОБ

(2) Отложим решения, полученные в первом пункте, на единичных окружностях (или обратимся к выше сделанным рисункам). Затем отложим вдоль единичных окружностей интервал $\left(\dfrac{3}{2}\pi;2\pi\right)$







Выбираем те решения первого пункта, которые расположены на интервале $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$.

Ответ: $x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$; $x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$; $x=2\pi-\arccos\frac{1}{3}$

2-ОЙ СПОСОБ

Для каждого из решений первого пункта составим неравенства:

(а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **Имеем неравенство:**

$$\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}+2\pi n<2\pi \Leftrightarrow \frac{3}{2}<-\frac{1}{4}+2n<2 \Leftrightarrow 6<-1+8n<8 \Leftrightarrow 7<8n<9$$

Т.е. $\frac{7}{8}<n<1\frac{2}{9}$. **Итак:** $n=1$ **Получаем:** $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 1=\frac{7\pi}{4}$

(б) $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ **Имеем неравенство:**

$$\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}+2\pi n<2\pi \quad \frac{3}{2}<-\frac{1}{3}+2n<2 \quad 3<-1+6n<6 \quad 4<6n<7 \quad \frac{2}{3}<n<1\frac{1}{6}$$

Итак: $n=1$. **Получаем:** $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1=\frac{5\pi}{3}$

(в) $x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi m$. **Имеем неравенство:**

Оценим значение $\arccos\frac{1}{3}$. **Нам будет достаточно следующей оценки:**

$0<\arccos\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$ **(арккосинус положительного числа, отличного от единицы).**

$\arccos\frac{1}{3}$	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
$-\arccos\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$
$-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right)$
При $n=1$ **имеем**	$\left(2\pi-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$**=**$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$**. Попадаем в заданный промежуток. Т.е.** $n=1$ **есть искомое решение.**
При $n=2;3;4\ldots$ **имеем**	$\left(4\pi-\frac{\pi}{2};4\pi\right)$**;** $\left(6\pi-\frac{\pi}{2};6\pi\right)$**;** $\left(8\pi-\frac{\pi}{2};8\pi\right)$**…** **Эти промежутки не пересекаются с заданным промежутком** $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$**. Поэтому значения n, большие 1 , не являются искомыми решениями.**
При $n=0;-1;2;\ldots$ **имеем**	$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$**;** $\left(-2\frac{1}{2}\pi;-2\pi\right)$**;** $\left(-4\frac{1}{2}\pi;-4\pi\right)$ **…** **Эти промежутки не пересекаются с заданным промежутком** $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$**. Поэтому значения n, меньшие 1 , не являются искомыми решениями.**

Итак, n-1. $x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi=2\pi-\arccos\frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$**;** $\frac{5\pi}{3}$**;** $2\pi-\arccos\frac{1}{3}$

3-ОЙ СПОСОБ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО РЕШЕНИЯ

$x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi m$. **Составим неравенство:** $\left(\frac{3\pi}{2}<-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<2\pi\right)$.

Решаем его:

$$\left(\frac{3\pi}{2}<-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<2\pi\right)\Leftrightarrow\left(3\pi<-2\arccos\frac{1}{3}+4\pi n<4\pi\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3\pi+2\arccos\frac{1}{3}<4\pi n<4\pi+2\arccos\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<n<1+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}\right)$$

Так как функция $\arccos x$ **- функция убывающая, то, поскольку** $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$**, имеем**

$$\overset{\uparrow}{\arccos\frac{1}{2}}<\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{\arccos 0}.$$

(стрелочки над границами показывают, что левую границу мы можем несколько увеличить, а правую уменьшить)

Далее:

$$\overset{\uparrow}{\frac{\pi}{3}}<\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\overset{\uparrow}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{3}}<\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}},\qquad \text{т.е.}\qquad \overset{\uparrow}{\frac{1}{6}}<\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{\frac{1}{4}}$$

Отсюда:

$$\overset{\uparrow}{\frac{11}{12}}<\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{1}\qquad\qquad \overset{\uparrow}{1\frac{1}{6}}<1+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<\overset{\downarrow}{1\frac{1}{4}}$$

Расширив предложенный промежуток $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}<n<1+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}\right)$ **до** $\left(\overset{\uparrow}{\frac{11}{12}};\overset{\downarrow}{1\frac{1}{4}}\right)$ **за счет сдвига левой границы** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}$ **влево, а правой** $1+\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}$ **вправо, получим:** $\left(\overset{\uparrow}{\frac{11}{12}}<n<\overset{\downarrow}{1\frac{1}{4}}\right)$. **Т.е.** $n=1$. **За счет расширения промежутка мы охватили все решения, но среди них могут оказаться посторонние. В данном случае 1 может оказаться посторонней.**

Сузив предложенный промежуток до $\left(\overset{\downarrow}{1};1\overset{\uparrow}{\frac{1}{6}}\right)$ за счет сдвига левой границы вправо, а правой - влево, получим: $\left(\overset{\downarrow}{1}<n<1\overset{\uparrow}{\frac{1}{6}}\right)$. Поскольку стрелочка над 1 предполагает, что мы можем взять число несколько более меньшее, чем 1, то решением данного неравенства станет 1. Итак, n=1 не является посторонним решением.

Итак: n-1. $x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi=2\pi-\arccos\frac{1}{3}$

СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ

Сопоставляя способы выполнения второго пункта задачи, мы можем сказать:

(*) Второй пункт для $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ **и** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ **легче выполнять вторым способом.**

(*)Второй пункт для $x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi m$ **- легче выполнять первым способом.**