ЗАДАЧА

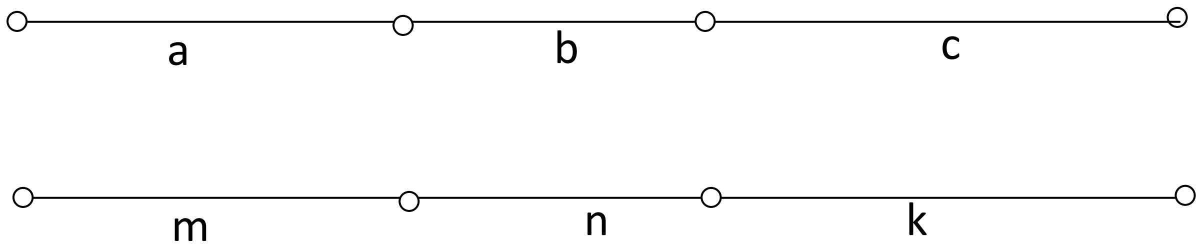
Класс делится на две подгруппы: физико-математической направленности, т.е. «физиков» и историко-филологической направленности, т.е. «лириков». Каждый ученик класса посещает спецкурс по естествознанию или по истории Японии, причем, возможно, что кто-то посещает и один и другой спецкурсы. Известно, что на спецкурсе по естествознанию «физиков» было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учеников, посещающих спецкурс по естествознанию. На спецкурсе по истории Японии «физиков» было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учеников, посещающих спецкурс по истории Японии.

a) Могло ли в классе из 20 человек быть 9 «физиков»?

b) Какое наибольшее количество «физиков» могло быть в классе, если всего в нем учатся 20 человек?

c) Какую наименьшую долю могли составлять клирикинъ от общего числа учащихся класса без дополнительных условий a) и b) ?

Возможны **разные модели** этой задачи, от выбора которых будет зависеть, насколько лаконичным является решение. Однако, выбор наиболее подходящих моделей является **непростой задачей.** Поэтому мы здесь выбираем наиболее простую и **естественную для ученика** модель, которая будет работать за счет незначительного усложнения расчетов.



Пусть **a; b; c** обозначают соответственно количество "**физиков**" ходящих только на спецкурс, на спецкурс и историю Японии одновременно, только на историю Японии.

Количество всех физиков равно: $a+b+c=9$

Пусть $m;\ n;\ k$ обозначают соответственно количество "**лириков**" ходящих только на спецкурс, на спецкурс и историю Японии одновременно, только на историю Японии.

Количество всех лириков равно: $m+n+k=20-9=11$

A) Имеем:

$$a+b\le\frac{2}{11}(a+b+m+n)\Rightarrow(a+b)-\frac{2}{11}(a+b)\le\frac{2}{11}(m+n)\Rightarrow\frac{9}{11}(a+b)\le\frac{2}{11}(m+n)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(a+b)\le 2(m+n)\Rightarrow a+b\le\frac{2}{9}(m+n)\le\frac{2}{9}\cdot 11\Rightarrow a+b\le 2\frac{4}{9}\Rightarrow a+b\le 2$$

B) Аналогично:

$$b+c\le\frac{2}{5}(b+c+n+k)\Rightarrow(b+c)-\frac{2}{5}(b+c)\le\frac{2}{5}(n+k)\Rightarrow\frac{3}{5}(b+c)\le\frac{2}{5}(n+k)\Rightarrow$$

$$3(b+c)\le 2(n+k)\Rightarrow b+c\le\frac{2}{3}(n+k)\le\frac{2}{3}\cdot 11\Rightarrow b+c\le 7\frac{1}{3}\Rightarrow b+c\le 7$$

C) В итоге:

$$(a+b)+(b+c)\le 2+7\Rightarrow(a+b+c)+b\le 9\Rightarrow(a+b+c)\le 9-b$$

"Количество физиков $\le 9-b$".

(1) Поскольку в первом вопросе содержится утверждение, что количество физиков равно 9, то получим: $9\le 9-b$. Возможно ли это? если b=0 (т.е. количество физиков, посещающих обе секции, равно 0), то неравенство выполняется. Т.е. **отрицать** возможность количества физиков в составе 9 человек невозможно. Но, чтобы доказать упомянутую возможность, необходимо предложить **конкретную ситуацию**.

Расмотрим следующую ситуацию: количество физиков 9. Количество физиков, посещающих сразу две секции равно 0. Количество физиков, посещающих спецкурс равно **2.** Количество физиков, посещающих историю Японии равно **7.**

Количество лириков, посещающих только спецкурс или спецкурс вместе с историей Японии равно **9**, количество лириков, посещающих только историю Японии или спецкурс вместе с историей Японии равно **11**.

Тогда $a+b=2+0=\frac{2}{9}$ от 9 $=\frac{2}{9}(m+n)$. Поэтому $a+b\le\frac{2}{9}(m+n)$ $\Leftrightarrow$ $a+b\le\frac{2}{11}(a+b+m+n)$

Тогда $b+c=0+7=\frac{7}{11}$ от 11$=\frac{7}{11}$ от ($n+k$). Но $\frac{7}{11}<\frac{2}{3}$.

Поэтому $b+c\le\frac{2}{3}(n+k)\Leftrightarrow b+c\le\frac{2}{5}(b+c+n+k)$. Итак мы построили математическую модель, доказывающую существование ситуации, описанной в задаче. **Т.е. ответ на вопрос первого задания утвердительный.**

(2) Если количество физиков увеличить, т.е положить равным 9+R (где R - натуральное число), то количество лириков станет равно 11– R. Но все расчеты в пунктах А и В останутся без изменения, за исключением последних трех неравенств, которые примут вид: $$a+b\le\frac{2}{9}(m+n)\le\frac{2}{9}\cdot(11-R)\Rightarrow a+b\le\frac{2}{9}\cdot 11\Rightarrow a+b\le 2$$

$$b+c\le\frac{2}{3}(n+k)\le\frac{2}{3}\cdot(11-R)\le\frac{2}{3}\cdot 11\Rightarrow b+c\le 7\frac{1}{3}\Rightarrow b+c\le 7$$

И снова будем иметь: $(a+b)+(b+c)\le 2+7\Rightarrow(a+b+c)+b\le 9\Rightarrow(a+b+c)\le 9-b$ "**Количество физиков** $\le 9-b$". Т.е. $9+R\ \le 9-b$, что невозможно даже при нулевом значении b. Т.е. увеличение количества физиков за пределы 9 невозможно. **Ответ: максимальное количество физиков равно 9.**

(3) **Задача (3) требует нахождения наименьшего возможного значения дроби** $\Omega=\dfrac{m+n+k}{a+b+c+m+n+k}$

Поскольку числитель и знаменатель дроби - положительные числа, то задача равносильна нахождению наибольшего значения обратной дроби $\dfrac{a+b+c+m+n+k}{m+n+k}$**.**

Имеем: $\dfrac{a+b+c+m+n+k}{m+n+k}=1+\dfrac{a+b+c}{m+n+k}=1+\dfrac{(a+b)+(b+c)-b}{m+n+k}$

Значение правой части увеличится, если положить максимальные значения $(a+b)$ **и** $(b+c)$**. Т.е. положить:** $a+b=\dfrac{2}{9}(m+n)-U_1$ **и** $b+c=\dfrac{2}{3}(n+k)-U_2$**, где** U_1 **и** U_2 **соответственно дробные части выражений** $\dfrac{2}{3}(n+k)$ **и** $\dfrac{2}{9}(m+n)$

Подставив эти значения в дробь, получим:

$$1+\frac{\frac{2}{9}(m+n)+\frac{2}{3}(n+k)-b-U_1-U_2}{m+n+k}=1+\frac{1}{9}\cdot\frac{2(m+n)+6(n+k)-9b-9U_1-9U_2}{m+n+k}=$$

$$=1+\frac{1}{9}\cdot\frac{2m+8n+6k-9b-9U_1-9U_2}{m+n+k}=1+\frac{1}{9}\cdot\frac{8m+8n+8k-6m-2k-9b-9U_1-9U_2}{m+n+k}=$$

$$=1+\frac{1}{9}\cdot(8-\frac{6m+2k+9b+9U_1+9U_2}{m+n+k})=\frac{17}{9}-\frac{6m+2k+9b+9U_1+9U_2}{m+n+k}$$

Положим **минимально возможные** в нашей ситуации значения m,k,b. **А именно**: m=0; k=0 (т.е. все лирики ходят в обе секции,); b=0 (никто из физиков не ходит в обе секции). В этом случае $\frac{2}{9}(m+n)=\frac{2}{9}n$ и $\frac{2}{3}(n+k)=\frac{2}{3}n$, где n станет количеством всех гуманитариев. Как только количество гуманитариев окажется кратным 9-ти, то U_1 и U_2 окажутся равными своему минимальному значению, т.е. нулю. Тогда выражение $\frac{6m+2k+9b+9U_1+9U_2}{m+n+k}$ примет **минимальное значение, равное нулю**. Т.е. $\frac{17}{9}-\frac{6m+2k+9b+9U_1+9U_2}{m+n+k}$ примет **максимальное** значение $\frac{17}{9}$, к чему мы и стремились. Тогда обратное значение Ω примет **минимальное** значение: $\Omega=\frac{9}{17}$

Ответ: $\frac{9}{17}$

P/S: Второй способ решения, основанный на общих моделях задач такого типа будет размещен позднее.