Найти все значения $a$, при каждом из которых неравенство $\dfrac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}\le 0$ не имеет решений.

**Решение**:

Воспользуемся логическими кванторами **всеобщности** (для любого t - $\forall t$) и **существования** (существует, найдется - $\exists t$) и знаком **отрицания** (черта над высказыванием). В дальнейшем термин "найти" передаем тем же знаком, что и "найдется".

$$(\exists a)\left(\overline{(\exists x)\left(\frac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}\le 0\right)}\right)$$

Т.е. "найдется (<u>найти</u>!) такое значение $a$, при котором <u>не найдется</u> ни одного значения $x$, которое <u>удовлетворяло бы неравенству</u>.

$$(\exists a)\left(\overline{(\exists x)\left(\frac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}\le 0\right)}\right)\underset{(1)}{\Leftrightarrow}(\exists a)(\forall x)\left(\frac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}>0\right)\overset{x=0}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$\overset{x=0}{\Rightarrow}(\exists a)\left(\frac{(3-\cos^2 0)-a}{a+(4\cdot 5^0+2\cdot 5^{-0})}>0\right)\Leftrightarrow(\exists a)\left(\frac{2-a}{a+6}>0\right)\Leftrightarrow a\in(-6;2).$$

(1) Используем формулы: $\overline{(\exists x)A(x)}\Leftrightarrow\overline{(\exists x)}\,\overline{A(x)}\Leftrightarrow(\forall x)\overline{A(x)}$

$\overline{(\forall x)A(x)}\Leftrightarrow\overline{(\forall x)}\,\overline{A(x)}\Leftrightarrow(\exists x)\overline{A(x)}$

(2) Решения находятся на промежутке $(-6;2)$ (но среди них могут быть посторонние).

**Продолжим решение, ограничившись промежутком** $(-6;2)$: $\underset{(-6;2)}{(\exists a)}$.

Т.е. имеем: $(\exists a)(\forall x)\left(\dfrac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}>0\right)\Leftrightarrow\underset{(-6;2)}{(\exists a)}\,(\exists x)\left(\dfrac{(3-\cos^2 x)-a}{a+(4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x})}>0\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\underset{(-6;2)}{(\exists a)}(\forall x)\left(\frac{\cos^2 x+a-3}{4\cdot 5^x+2\cdot 5^{-x}+a}<0\right)$$

**Произведем оценку числителя:**

- $a\in(-6;2)\Rightarrow a-3\in(-9;-1)$
- $\cos^2 x\in[0;1]$
- Итак:

$-9<a-3<-1,$ *для любого значения а из промежутка* $(-6;-2)$

$\underline{0\le\cos^2 x\le 1}$ *для любого допустимого значения х*

$-9<\cos^2 x+a-3<0$ *для любых допустимых значений а и х*

**Продолжаем:**

$$\begin{cases}\underset{(-6;2)}{(\exists a)}(\forall x)(\cos^2 x + a - 3 < 0)\\ \underset{(-6;2)}{(\exists a)}(\forall x)\left(\dfrac{\cos^2 x + a - 3}{4\cdot 5^x + 2\cdot 5^{-x} + a} < 0\right)\end{cases} \Leftrightarrow \underset{(-6;2)}{(\exists a)}(\forall x)\left(4\cdot 5^x + 2\cdot 5^{-x} + a > 0\right) \overset{t=5^x}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{t=5^x}{\Leftrightarrow} \underset{(-6;2)}{(\exists a)}\underset{(0;+\infty)}{(\forall t)}\left(4\cdot t + \frac{2}{t} + a > 0\right) \Leftrightarrow \underset{(-6;2)}{(\exists a)}\underset{(0;+\infty)}{(\forall t)}\left(\frac{4t^2 + at + 2}{t} > 0\right) \overset{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{t>0}{\Leftrightarrow} \underset{(-6;2)}{(\exists a)}\underset{(0;+\infty)}{(\forall t)}\left(4t^2 + at + 2 > 0\right)$$

**Теоретико-множественная трактовка:**

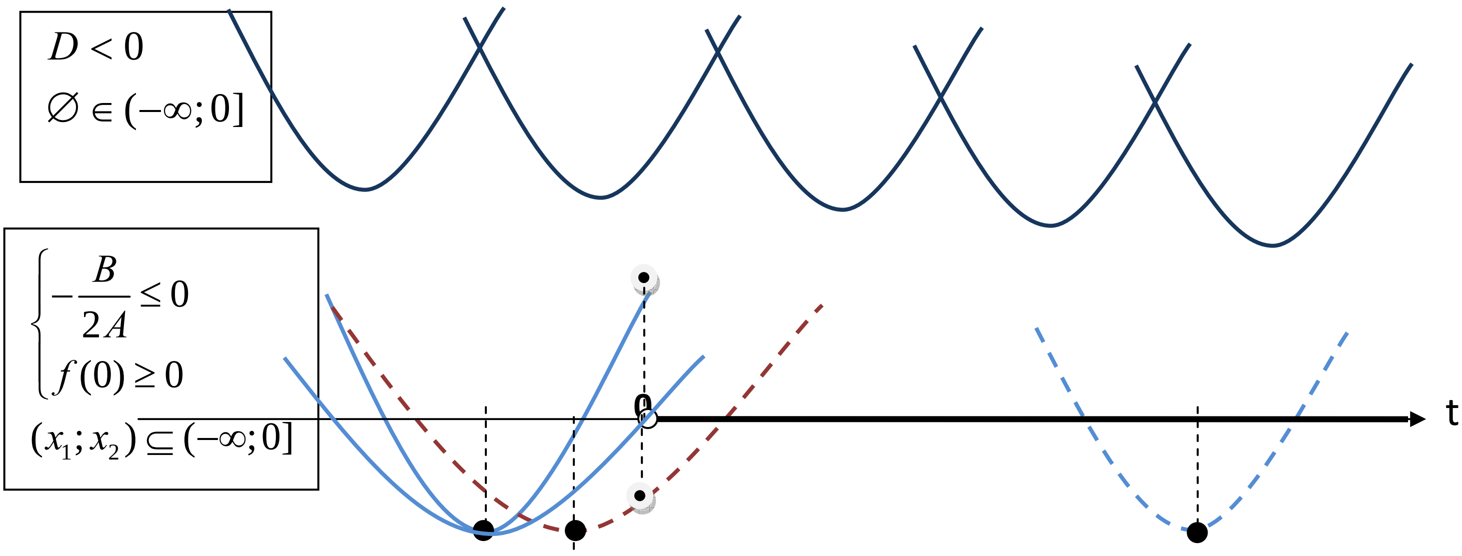
$K$ - множество всех решений неравенства. Если $(0;+\infty)\subseteq K$, то $\overline{K}\subseteq\overline{(0;+\infty)}$. Т.е. $\overline{K}\subseteq(-\infty;0]$

$$\underset{(-6;2)}{(\exists a)}\left((0;+\infty)\subseteq K^{(4t^2+at+2>0)}\right) \Leftrightarrow \underset{(-6;2)}{(\exists a)}\left(K^{(4t^2+at+2\le 0)}\subseteq(-\infty;0]\right)$$

**Геометрическая трактовка:**

Пусть $f(t) = 4t^2 + at + 2$ . График- парабола. Ветви – вверх, так как A=4>0. Так как $\dfrac{C}{A} = \dfrac{2}{4} > 0$, то нули функции (если они существуют) одного знака.

Начертим схематично различные способы расположения такой параболы относительно промежутка $(0;+\infty)$ на оси t.




Нашему неравенству удовлетворяют лишь два типа расположения параболы – они отмечены **сплошной** линией. Им соответствуют две системы.

**Составляем совокупность двух систем:**

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-6;2)\\ -\dfrac{B}{2A}\le 0\\ f(0)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-6;2)\\ D<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-6;2)\\ -\dfrac{a}{4}\le 0\\ 2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-6;2)\\ a^2-32<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-6;2)\\ a\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-6;2)\\ a\in(-4\sqrt{2};4\sqrt{2})\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\in[0;2)\\ a\in(-4\sqrt{2};2)\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in(-4\sqrt{2};2)$$

**ОТВЕТ:** $a\in(-4\sqrt{2};2)$