Дана система уравнений:

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=4 \\ |x-1|+|y|=a \end{cases}$$

При каких значениях параметра a система имеет два решения?

РЕШЕНИЕ:

$$a \geq 0$$

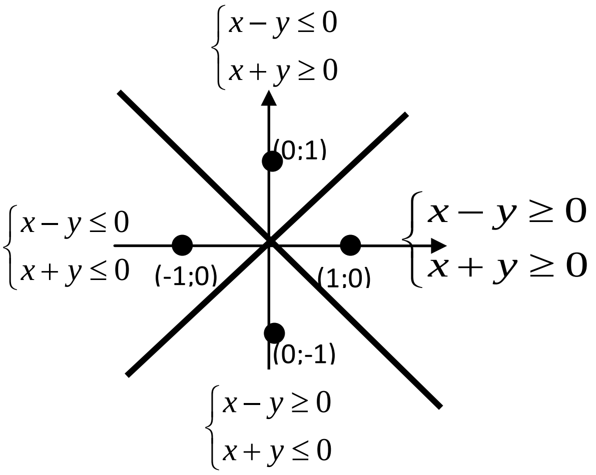
Выберем подмодульные выражения $x-y$; $x+y$ для первого уравнения и $x-1$; y для второго уравнения. Приравняв их нулю, построим графики полученных уравнений: $x-y=0$; $x+y=0$ в одной системе координат и графики двух других $x-1=0$; $y=0$ в другой системе координат.

Каждая координатная плоскость разбивается графиками <u>на замкнутые области</u> (области, включающие свои границы).

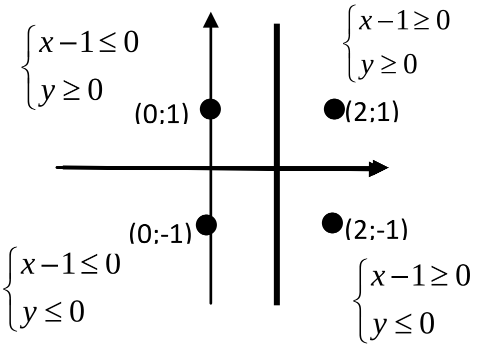
Для определения знака каждого выражения в каждой из этих областей, <u>выберем внутри каждой области по точке.</u>

<u>Подставляя координаты каждой точки</u> в выражения, находим знак этого выражения в рассматриваемой области.

Для выражений: $x-y$; $x+y$



Для выражений: $x-1$; y



СТРОИМ ГРАФИК $|x-y|+|x+y|=4$

(1) Если $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $x-y+x+y=4$, т.е. $x=2$.

Найдем точки пересечения прямой $x=2$ с прямыми $x-y=0$ и $x+y=0$ ($y=x$ и $y=-x$)

$\begin{cases} x=2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Получили точку $(2;2)$ | $\begin{cases} x=2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$. Получили точку $(2;-2)$

(2) Если, $\begin{cases} x-y\le 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$ то уравнение примет вид: $-x+y+x+y=4$, т.е. $y=2$.

Найдем точки пересечения прямой $y=2$ с прямыми $x-y=0$ и $x+y=0$ ($y=x$ и $y=-x$)

$\begin{cases} y=2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$. Получили точку $(2;2)$ | $\begin{cases} y=2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$. Получили точку $(-2;2)$

(3) Если $\begin{cases} x-y\le 0 \\ x+y\le 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $-x+y-x-y=4$, т.е. $x=-2$.

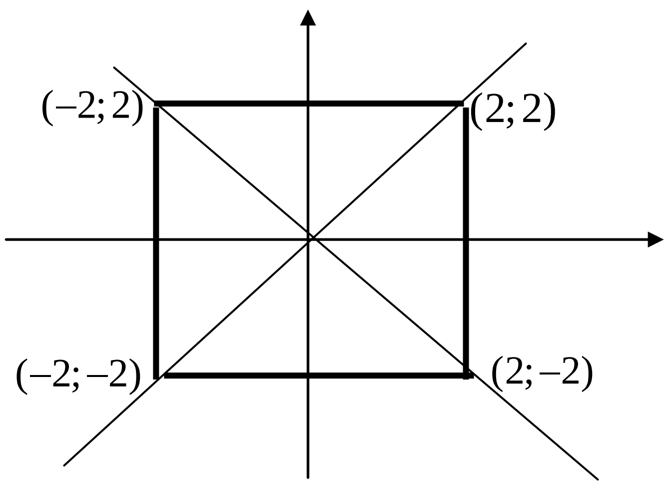
Найдем точки пересечения прямой $x=-2$ с прямыми $x-y=0$ и $x+y=0$ ($y=x$ и $y=-x$)

$\begin{cases} x=-2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$. Получили точку $(-2;-2)$ | $\begin{cases} x=-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$. Получили точку $(-2;2)$

(4) Если $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\le 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $x-y-x-y=4$, т.е. $y=-2$

Найдем точки пересечения прямой $y=-2$ с прямыми $x-y=0$ и $x+y=0$ ($y=x$ и $y=-x$)

$\begin{cases} y=-2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ Получили точку $(-2;-2)$ | $\begin{cases} y=-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases}$. Получили точку $(2;-2)$



СТРОИМ ГРАФИК $|x-1|+|y|=a$

(1) Если $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $x-1+y=a \Leftrightarrow y=-x+a+1$

Найдем точки пересечения прямой $y=-x+a+1$ с прямыми $x=1$ и $y=0$

$\begin{cases} y=-x+a+1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ x=1 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1;a)$ | $\begin{cases} y=-x+a+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-x+a+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+1 \\ y=0 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1+a;0)$

Если, $\begin{cases} x-1\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ то уравнение примет вид: $-x+1+y=a \Leftrightarrow y=x+a-1$

Найдем точки пересечения прямой $y=x+a-1$ с прямыми $x=1$ и $y=0$

$\begin{cases} y=x+a-1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ x=1 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1;a)$ | $\begin{cases} y=x+a-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=x+a-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-a \\ y=0 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1-a;0)$

Если $\begin{cases} x-y\le 0 \\ x+y\le 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $-x+1-y=a \Leftrightarrow y=-x-a+1$

Найдем точки пересечения прямой $y=-x-a+1$ с прямыми $x=1$ и $y=0$

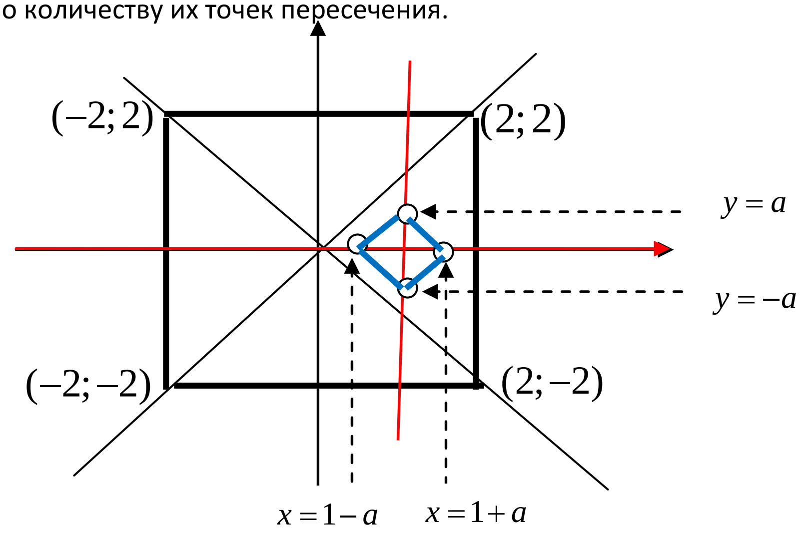
$\begin{cases} y=-x-a+1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-a \\ x=1 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1;-a)$ | $\begin{cases} y=-x-a+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-x-a+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-a \\ y=0 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1-a;0)$

Если $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$, то уравнение примет вид: $x-1-y=a \Leftrightarrow y=x-a-1$

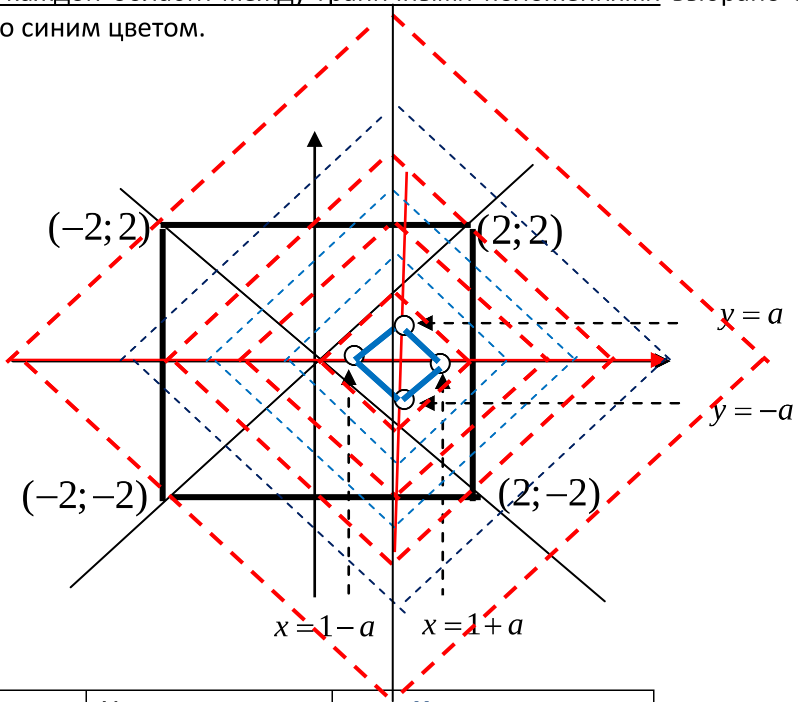
Найдем точки пересечения прямой $y=x-a-1$ с прямыми $x=1$ и $y=0$

$\begin{cases} y=x-a-1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-a \\ x=1 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1;-a)$ | $\begin{cases} y=x-a-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=x-a-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+a \\ y=0 \end{cases}$. <u>Точка:</u> $(1+a;0)$.

Графиком уравнения является четырехугольник, диагонали которого <u>взаимно перпендикулярны</u>, делятся <u>пополам</u>, причем каждая половинка каждой диагонали <u>равна</u> $|a|$. Из этого следует, что графиком уравнения является квадрат. Построив этот оба графика в одной системе координат, мы ищем количество решений систему по количеству их точек пересечения.



Изменяя $|a|$ от 0 до $+\infty$, следим за количеством решений системы. На рисунке граничные положения второго графика (в момент изменения количества решений) изображены красным цветом. В каждой области между граничными положениями выбрано одно положение, которое изображено синим цветом.



	Характеристика области или границы	Количество решений
1 область	$0 \le \|a\| < 1$	**0 решений**
Граница	$\|a\|$ =1	**1 решение**
2 область	$1 < \|a\| < 2$	**2 решения**
Граница	$\|a\| = 2$	**4 решения**
3 область	–	**6 решений**
Граница	–	**5 решений**
4 область	–	**4 решения**
Граница	$\|a\|$ =2+2+1=5	**2 решения**
5 область	$\|a\|$ >5	**0 решений**

Коротко это можно записать так: 0-0; 1; 2-2; 4; 6-6; 5; 4-4; 2; 0-0

Итак, 2 решения система имеет при $1 < |a| < 2$ и при $|a|$=5.

Но $a \ge 0$: таким образом, имеем следующий **ответ**:

$a = 5$: $a \in (1;2)$