

"Арифметическая прогрессия" для действий (в начале задачи)

$$a_1 ; a_1 + d ; a_1 + 2d ; a_1 + 3d ; \dots$$

"Арифметическая прогрессия" для уравнений (в конце задачи)

$$a_{n+1} - a_n = \text{const}, \text{ то есть. } a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$$

Например: $x ; 8 ; x + 2$ есть арифметическая прогрессия. Составим уравнение:
Т.е. $8 - x = (x + 2) - 8$

$$a_m = a_n + d(m - n)$$

Например

$$a_2 = a_7 - 5d$$

$$a_7 = a_4 + 3d;$$

$$\frac{a_7 - a_4}{3} = d$$

Смещение номеров

$$a_m + a_n = a_{m+k} + a_{n-k}$$

Например

$$a_3 + a_7 = a_1 + a_9 \text{ или } a_5 + a_5$$

В частности

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Например:

$$a_5 = 8. S_9 = ?$$

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_5 + a_5}{2} \cdot 9 = \frac{16}{2} \cdot 9 = 72$$

$$S_{(5,25)} = S_{25} - S_4 !!!$$

$$S_{(5,25)} = \frac{a_5 + a_{25}}{2} \cdot 21$$

Является ли последовательность с заданной формулой суммы членов арифметической прогрессией?

$$S_n = n^2 + 3n$$

$$S_n = n^2 + 3n \longrightarrow S_{n-1} = (n-1)^2 + 3(n-1) = n^2 + n - 2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+2 \longrightarrow a_{n+1} = 2(n+1) + 2 = 2n + 4$$

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

Последовательность есть арифметическая прогрессия с разностью d , равной 2

Геометрическая прогрессия (ля действий, в начале задачи):

$$a_1 ; a_1 q ; a_1 q^2 ; a_1 q^3 ; \dots$$

Геометрическая прогрессия (уравнение, в конце задачи):

$$a_{n+1} : a_n = \text{const} \\ a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \dots$$

Например: $x; 8; x+2$ есть геометрическая прогрессия.

$$\text{Т.е. } a_{n+1} : a_n = \text{const}$$

$$\text{Т.е. } 8 : x = (x+2) : 8$$

$$a_m = a_n q^{m-n}$$

Например:

$$a_2 = a_7 \cdot q^{-5} = \frac{a_7}{q^5}$$

$$a_7 = a_4 \cdot q^3;$$

Смещение номеров

$$a_m \cdot a_n = a_{m+k} \cdot a_{n-k}$$

Например:

$$a_3 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_9 \text{ или } a_5 \cdot a_5$$

$$a_n = \pm \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ если } |q| < 1,$$

$$S_{(5,25)} = S_{25} - S_4 !!!$$

$$S_{(5,25)} = \frac{a_5(q^{21} - 1)}{q - 1} !!!$$

Задача:

Является ли последовательность с заданной формулой суммы членов геометрической прогрессией?

$$S_n = 3 \cdot 5^{n+4}$$

$$S_{n-1} = 3 \cdot 5^{n+3}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3 \cdot 5^{n+3} (5 - 1) = 12 \cdot 5^{n+3} \longrightarrow a_{n+1} = 12 \cdot 5^{n+4}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$$

Последовательность есть геометрическая прогрессия со знаменателем q , равным 5

Преобразовать периодическую дробь в обыкновенную

$0,(34) = 0,3434343434\dots = 0,34 + 0,0034 + 0,000034 + \dots = \frac{0,34}{1-0,01} = \frac{0,34}{0,99} = \frac{34}{99}$ - сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Другой пример:

$2,5(34) = 2,53434343434\dots = 2,5 + 0,034 + 0,00034 + 0,0000034 + \dots$

$$= 2,5 + \frac{0,034}{1-0,01} = \frac{0,034}{0,99} = \frac{34}{990} = \frac{25}{10} + \frac{34}{990} = \frac{25 \cdot 99 + 34}{990} = \dots$$

Примеры решения задач:

1. Пятый член арифметической прогрессии равен 20. Найти сумму девяти членов этой прогрессии.

Дано: Арифметическая прогрессия. $a_5 = 20$. Найти: S_9

Решение: $S_{10} = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_5 + a_5}{2} \cdot 9 = 9 \cdot a_5 = 9 \cdot 20 = 180$

Ответ: 180

2. Пятый член арифметической прогрессии равен 20. Пятнадцатый член равен 80. Найти сумму членов прогрессии, начиная с 12 и кончая 42.

Дано: Арифметическая прогрессия. $a_5 = 20$.

Решение: $S_{(12;42)} = \frac{a_{12} + a_{42}}{2} \cdot (42 - 11) = \frac{a_{27} + a_{27}}{2} \cdot 31 = 31 \cdot a_{27}$

Имеем: $d = \frac{a_{15} - a_5}{15 - 5} = \frac{80 - 20}{10} = 6$.

Далее: $a_{27} = a_{15} + d(27 - 15) = a_{15} + 12d = 80 + 12 \cdot 6 = 152$

Получаем: $S_{(12;42)} = 31 \cdot a_{27} = 31 \cdot 152 = 4712$

Ответ: 4712

3.

Пусть a_1, a_2, a_3 – арифметическая прогрессия ($d \neq 0$). Числа $a_1 a_2$; $a_2 a_3$; $a_1 a_3$ составляют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Дано: 1) $a_1; a_1 + d; a_1 + 2d, d \neq 0$;

2) $a_1(a_1 + d); (a_1 + d)(a_1 + 2d); a_1(a_1 + 2d)$ – геометрическая прогрессия.

Найти знаменатель q .

РЕШЕНИЕ:

(1) С одной стороны, из условия вытекает:

$$q = \frac{(a_1 + d)(a_1 + 2d)}{a_1(a_1 + d)} = \frac{a_1(a_1 + 2d)}{(a_1 + d)(a_1 + 2d)} \Leftrightarrow q = \frac{a_1 + 2d}{a_1} = \frac{a_1}{a_1 + d}$$

После деления числителя и знаменателя на d ($d \neq 0$), получим:

$$q = \frac{\frac{a_1}{d} + 2}{\frac{a_1}{d}} = \frac{\frac{a_1}{d} + 2}{\frac{a_1}{d} + 1} \stackrel{t = \frac{a_1}{d}}{\Leftrightarrow} q = \frac{t + 2}{t} = \frac{t}{t + 1}.$$

Решая последнее уравнение $\frac{t + 2}{t} = \frac{t}{t + 1}$, получим: $t = -\frac{2}{3}$.

(2) С другой стороны $q = \frac{t + 2}{t}$. Подставляя, получим: $q = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{-\frac{2}{3}} = \frac{-2 + 6}{-2} = -2$.

Ответ: -2

КРУГ 1

Арифметическая прогрессия:

1. Выразить a_{12} через a_3 ; a_{102} через a_1 ; a_{12} через a_{15} ; a_{m+1} через a_{m-1} ; a_m через a_{2k}
2. Найти d , если $a_6 = 18$ и $a_{10} = 38$; $a_3 = x$ и $a_{10} = y$; $a_3 = 10$ и $a_4 = 16$
3. $a_6 = 18$ и $a_{10} = 38$ Найти a_1 ; a_{20} ; a_8 ; $a_3 + a_{13}$; a_n ; a_{80} ; a_{90} ; a_{91} ; a_{92}
4. $a_6 = 18$ и $a_{10} = 38$ Найти S_{15} ; S_n ; S_{27} ; $S_{16,27}$
5. $S_n = n^2 - 3n + 5$. Найти a_n , доказать, что (a_n) -арифметическая прогрессия. Найти a_{90}

Геометрическая прогрессия:

6. Выразить a_{12} через a_3 ; a_{102} через a_1 ; a_{12} через a_{15} ; a_{m+1} через a_{m-1} ; a_m через a_{2k}
7. Найти q , если $a_6 = 3$ и $a_{10} = 48$; $a_3 = 80$ и $a_6 = 10$
8. $a_3 = 80$ и $a_6 = 10$ Найти a_1 ; a_{16} ; a_8 ; $a_4 a_5$; a_n ; a_8
9. $a_6 = 3$ и $a_{10} = 48$ Найти S_5 ; S_n ; $S_{3,5}$
10. $S_n = 2 \cdot 3^{n+1}$. Найти a_n , доказать, что (a_n) -геометрическая прогрессия. Найти a_5

11. Сделать алгебраическую запись:

- $x; 3x + 2; x + 12$ – арифметическая прогрессия
- $x; 3x + 2; x + 12$ – геометрическая прогрессия
- Сложить первый и третий члены геометрической прогрессии, умножить второй член на 2, первый член увеличить на 1.
- Сложить первый и третий члены арифметической прогрессии, умножить второй член на 2, первый член увеличить на 1.

12. Бесконечная геометрическая прогрессия

- Найти сумму $S_\infty = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \frac{1}{1024} + \frac{1}{4096} + \dots$
- Преобразовать периодическую дробь в обыкновенную: $0,(25)$; $2,(12)$; $125,1(23)$.

13.

Пусть a_1, a_2, a_3 – арифметическая прогрессия ($d \neq 0$). Числа a_1a_2 ; a_2a_3 ; a_1a_3 составляют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

14.

При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $3^{x+2} + 3^{2-x}$; $\frac{a}{2}$; $9^{x+1} + 9^{1-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

15.

При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $2^{-x-1} - a$; -2^x ; $3 \cdot 2^{-2x} + 3 \cdot 2^{2x+4}$ образуют арифметическую прогрессию?

16.

Числа a_1, a_2, \dots, a_{12} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $a_2 + a_7 + a_{12} = 15$. Найдите $a_5 + a_9$.

17.

Числа b_1, b_2, \dots, b_8 образуют геометрическую прогрессию. Известно, что $b_2 \cdot b_5 \cdot b_8 = 64$. Найдите $b_2 \cdot b_8$.

КРУГ 2

Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м^2 . Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м^2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если 1 коробки хватает на $1,2 \text{ м}^2$ пола, а для замены некачественных плиток понадобится 3 коробки?

Спортсмен в первую минуту пробежал 300 м, а в каждую следующую минуту он пробежал на 40 м меньше, чем в предыдущую. За сколько минут он пробежит 1200 м?

Моторная лодка в первую минуту отстала от катера на 300 м, а в каждую следующую она отставала в минуту на 20 м больше, чем в предыдущую. Через сколько минут отставание от катера станет равным 2960 м?

С2 Пятый член арифметической прогрессии, разность которой положительна, равен 2. Найти наименьшее значение произведения первого, третьего и седьмого членов этой прогрессии.

В8. Автомобиль ехал в гору. В первую секунду после достижения пункта А он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта А, навстречу ему выехал автобус из пункта В, находящегося на расстоянии 258 м от А. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

В8. Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух точек, расстояние между которыми 20 м. Тело, находящееся позади, проходит в первую секунду 25 м, а в каждую следующую на $\frac{1}{3}$ м больше, чем в предыдущую; второе тело проходит в первую секунду 30 м, а каждую следующую на 0,5 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько секунд первое тело догонит второе?

В8. Автомобиль ехал в гору. В первую секунду после достижения пункта А он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта А, навстречу ему выехал автобус из пункта В, находящегося на расстоянии 258 м от А. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

КРУКГ 3

6.001. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 2600 руб., а за каждое следующее кольцо платили на 200 руб. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 4000 руб. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $2244\frac{4}{9}$ руб.

Сколько колец было установлено?

6.002. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $\frac{65}{72}$. Найти сумму 17 первых членов прогрессии.

6.003. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

6.004. Найти три первых члена a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1 a_3 a_5 = 80$.

6.005. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена прогрессии.

6.006. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

6.007. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

6.012. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов прогрессии.

6.013. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму 10 первых членов арифметической прогрессии.

6.014. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти три первых члена прогрессии.

6.016. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

6.017. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

6.021. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма ее n первых членов равна $5n^2$. Найти разность прогрессии и три первых ее члена.

6.022. Произведение трех первых членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

$$2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{13}{6}, \text{ где } |x| < 1;$$

6.024. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна — 22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

6.025. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 153,6. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

6.027. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно $\frac{135}{16}$. Найти сумму 15 первых членов прогрессии.

6.029. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

✓ **6.032.** Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

6.050. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

Найти сумму

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

6.036. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

6.042. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

6.043. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

6.044. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

6.045. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

6.040. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

— **6.046.** Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

6.047. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$.