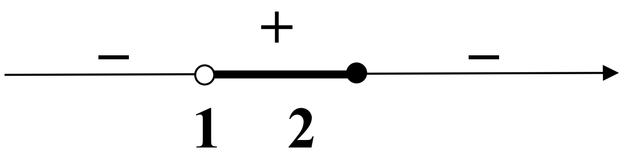
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ.

I) 3x - 5>10 – линейное неравенство. Решаем методом переноса: 3x>15, т.е. x>5, и т.д.
II) $x^2>0$ можно решить перебором чисел.
III) <u>Более сложные неравенства</u> (квадратные, дробные, иррациональные и др.) решаются методом интервалов:

Оформление решения <u>рационального</u> неравенства следующее:

$\frac{x}{x-1}\ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{x-1}-2\ge 0\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2-x}{x-1}\ge 0\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-x)(x-1)\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$	
 Ответ: $x\in(1;2]$	1. $y=(2-x)(x-1)$ 2. $(2-x)(x-1)=0$ $x=2; x=1$-одинарная кратность 3. $f(+\infty)=-\infty\cdot(+\infty)<0$

Итак: план решения <u>рационального</u> неравенства:

1. Производим стандартные преобразования:

- Находим <u>ОДЗ.</u>
- Приводим к виду $\underline{f(x)>0}$
- Знакопостоянные множители в левой части сокращаем – остальные раскладываем на линейные множители,: $\underline{f_1\cdot f_2\cdot \cancel{f_3}\cdot f_4\cdot \cancel{f_5}\cdot ...\cdot f_n \wedge 0}$

2) Находим <u>нули и полюса</u> функции $f(x)$ и их <u>кратность</u>.

3) Расставляем <u>знаки</u> функции на промежутках (по правилу чередования или методом проб).

4) Штрихуем <u>решение</u> неравенства.

ЗАМЕЧАНИЯ

ПУНКТ 1.

- Нахождение ОДЗ по максимуму: сразу выписываем все необходимые требования. Нахождение ОДЗ по минимуму: можно отложить те или иные требование до того момента, когда не начнут исчезать "опасные" действия: при исчезновении они оставляют "**завещания**":

  По максимуму: $\frac{x}{x-1}\ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{x-1}\ge 0\\ x-1\ne 0\end{cases}$ И т.д.

  По минимуму: $\frac{x}{x-1}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2-x)(x-1)\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$ И т.д.

- $2x(x^2-x+1)(x^2-45)(x^2+45)(x+8)(x+6)^2(x^2-6x+9)\le 0$

  Одни сомножители мы раскладываем на линейные множители. Другие (x^2+45 и x^2-x+1) и на линейные множители не раскладываются, поскольку они знакопостоянны. . Такие сомножители удаляются по теореме: Если на ОДЗ обе части неравенства поделить (**сократить**) на знакопостоянный положительный сомножитель с сохранением знака неравенства, получим неравенство, равносильное данному. Сокращаем также на 2.

  Получили стандартный вид неравенства: $x(x-\sqrt{45})(x+\sqrt{45})(x+8)(x+6)^2(x-3)^2\le 0$

Замечание: Нельзя сокращать на:

x^2-6x+9 $\quad (x+6)^2$ $\quad \sqrt{x-5}$

поскольку эти выражения кроме положительных значений ***могут еще обратиться в нуль***. В дальнейшем будем обозначать такие выражения значком $\oplus$.

Нельзя сокращать и на х**,** поскольку оно принимает и положительные, и отрицательные, и нулевое значения.

ПУНКТ 2. Кратность нуля определяется количеством линейных сомножителей с выбранным корнем.

Например, в уравнении $x(x^2-3x)(x-2)^2(x^2-8x+16)(x-5)^3=0$ после разложения на линейные множители: $x^2(x-3)(x-2)^2(x-4)^2(x-5)^3=0$ будем иметь: "0" встречается в двух линейных сомножителях ($x^2=x\cdot x$) – кратность нуля равна 2. "3" – в одном линейном сомножителе - одинарная кратность. "2"- в двух линейных сомножителях ($(x-2)^2=(x-2)(x-2)$) – двойная кратность, "4" – двойная кратность, а "5" – тройная кратность.

ПУНКТ 4. Определяем знаки функции на каждом из этих интервалов. Для этого Вы можно выбрать один из алгоритмов:

Алгоритм1 Из каждого интервала выбирается числовую точку Знак функции на интервале определяется знаком функции в этой точке. **Старайтесь выбрать такую точку из интервала, чтобы вычисления были наиболее легкими.**

Алгоритм 2. Определяем знак функции для **крайнего правого** интервала, положив в качестве значения х достаточно большое число (или символ **плюс-бесконечность**). Подставьте это число (или $+\infty$) в старший член числителя и в старший член знаменателя. Например: $\dfrac{3x-5x^3+1789x^2-1}{(x^2-156)(x-3)}$.

Старший член числителя $-5x^3$. Старший член знаменателя получится из произведения старших членов каждой скобки-сомножителя. В них и подставляем бесконечность. Получим: $\dfrac{-5(+\infty)^3}{(+\infty)^2(+\infty)}=\dfrac{-\infty}{+\infty}<0$. Итак, на крайнем правом интервале функция принимает отрицательное значение.

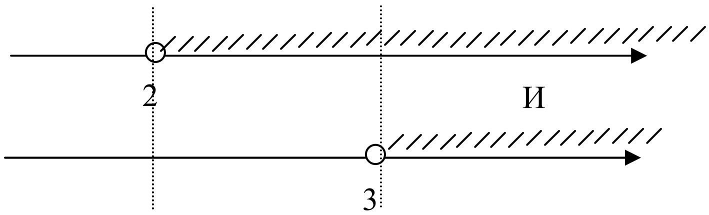
Теперь применяем правило чередования знаков: при переходе значения х (функции) через нуль **нечетной** кратности (первой, третьей, пятой и т.д.) знак функции **меняется**. При переходе значения х (функции) через нуль **четной** кратности (второй, четвертой) знак функции **остается прежним**.

Замечание**: Если в неравенстве есть "опасные действия", то получаем более сложное чередование**: +; –; $\varnothing$.

СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ.

16. Решить систему $\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$ это значит найти те значения x, которые являются решениями **И** первого неравенства, **И** второго. Т.е., с логической точки зрения, система означает конъюнкцию (логический союз "И"). С теоретико-множественной точки зрения это есть пересечение ($\bigcap$) множеств всех решений первого и второго неравенств.

Итак: **система** $\{$ **союз И** **пересечение** $\bigcap$ означают одно и то же.

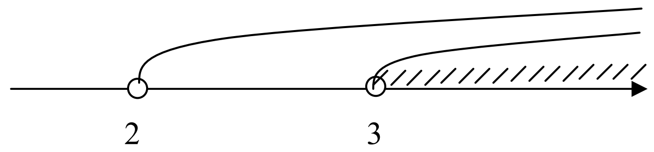


Союз "И" ставим на третьем промежутке, поскольку только числа этого промежутка принадлежат множеству решений первого неравенства и множеству решений второго неравенства. Это и есть пересечение двух заштрихованных множеств.

Ответ: $(3;+\infty)$

Замечание.

Если неравенств два, то вместо двух осей можно рисовать одну:

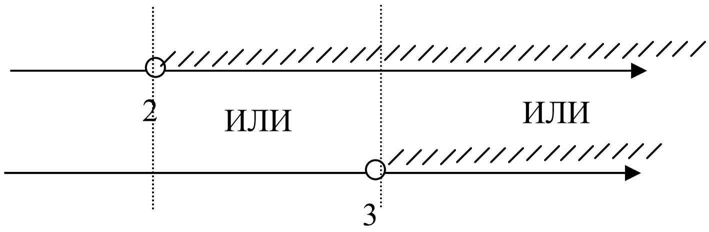


Здесь заштрихованы только общие решения.

17. Решить совокупность $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x > 3 \end{array}\right.$ **это значит найти** те значения x, которые являются решениями **ИЛИ** первого неравенства, **ИЛИ** второго (это ИЛИ допускает, что значение x может являться решением и обоих неравенств одновременно)

Т.е., с логической точки зрения, система означает дизъюнкцию (логический союз "ИЛИ"). С теоретико-множественной точки зрения это есть объединение ($\bigcup$) множеств всех решений первого и второго неравенств.

Итак: **совокупность** $[$ **союз ИЛИ** **объединение** ($\bigcup$) означают одно и то же.



Союз "Или" ставим на втором и третьем промежутках, поскольку числа этих промежутков являются решениями хотя бы одного из неравенств: первого или второго. Это и есть объединение двух заштрихованных множеств.

Ответ: $(2;+\infty)$

18. В СИСТЕМЕ ВСЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЗАИМОСВЯЗАНЫ, ПОСКОЛЬКУ СОЕДИНЕНЫ СОЮЗОМ ОДНОВРЕМЕННОСТИ И.

Т.е. любое следствие любой строчки системы распространяется и на все другие строчки системы. Это позволяет упрощать системы.

Например: $\begin{cases}(x-2)(x-4)(x-5)(x-10)>0\\ x>8\,(\Rightarrow x>2; x>4; x>5)\end{cases}$. Условия $x>2; x>4; x>5$, благодаря конъюнкции "И", переносятся на верхнюю строчку. Поэтому сомножители $(x-2); (x-4); (x-5)$ можно считать знакопостоянными (положительными) и поэтому на них можно сократить. Получаем: $\begin{cases}x-10>0\\ x>8\end{cases} \Leftrightarrow ...$

В совокупности такого переноса нет!!!

19. Пульсация системы

Например: $\begin{cases}x>4\\ x>8\\ x>3\\ x<12\\ x<290\\ x\ge 5\\ x<12\end{cases}$

Рассмотрим сонаправленные неравенства, глядящие вправо: первое, третье, шестое неравенства "содержатся" во втором, ведь, если x больше 8, то и подавно боле 4, боле 3, больше-раво5. Говорят, что первое, третье, шестое неравенства являются **следствиями** второго. Таким образом, из правоглядящих неравенств можно оставить только второе.. (по принципу: больше большего). Аналогично, по принципу "меньше меньшего" из левоглядящих неравенств оставляем четвертое. Получим $\begin{cases}x>8\\ x<12\end{cases}$ Теперь можно продолжить решать систему.

Указанное упрощение можно условно назвать "пульсацией системы", в процессе которого, количество соотношений то уменьшается, то увеличивается.

20. Другой пример:

$$\begin{cases}tg\,x=8\\ \cos x\ne 0\\ \sin x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tg\,x=8\\ \sin x>0\end{cases}$$

В данном примере второе соотношение оказалось поглощено первым, поскольку, если тангенс равен 8, то он существует, а, если существует, то его знаменатель $\cos x$ отличен от нуля. Т.е. второе соотношение "содержится в первом и его можно опустить (забрать внутрь первого). При дальнейшем решении, в случае необходимости его снова можно выпустить в систему.

22. Метод пульсации (стадия расширения)

$$\begin{cases}\sin x = x^2 \\ \sin x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = x^2 \\ \sin x \ge 0 \\ \sin x \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = x^2 \\ \sin x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = 0 \\ \sin x = 0\end{cases}$$

Во второй системе **на второй строчке мы записали новое неравенство, которое является следствием первого уравнения.**

Взаимодействие второй и третьей строчек дает нам в качестве следствия вторую строчку третьей системы.

Методом подстановки получаем четвертую систему.

Теперь можно решить оба уравнения последней системы и затем выбрать общие решения.

Но лучше решить только одно (первое) уравнение и проверить найденные решения (решение) во втором: $\begin{cases}x = 0 \\ \sin 0 = 0(\textit{верно на } R)\end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

24. В совокупности подобные взаимодействия **не работают**, поскольку соотношения, входящие в совокупность – это отдельные, **независимые один от другого случаи**.

Например, решая структуру систем и совокупностей $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 5 \\ x = 3\end{array}\right. \\ x > 4\end{cases}$, нужно рассматривать два независимых случая: для x=5 и для x=3.

Мы будем оформлять это так: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 5 \\ x = 3\end{array}\right. \\ x > 4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 5 \\ x > 4\end{cases} \\ \begin{cases}x = 3 \\ x > 4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 5 \\ x \in \varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5$

ПРИМЕРЫ. СЛОЙ 1: Решите уравнение, неравенство, их системы или совокупности.

6.101, $x^2-6x+8\ge 0$ $x^2+x-4\le 0$, $2x^2-5x+3>0$, $2a^2+5a<0$, $-y^2+8y+20\ge 0$

6.102 $z^2+10z+25\ge 0$, $x^2-12x\le 36$, $b^2>6b-9$, $c^2+16<8c$, $x^2-4x+2<0$, $6x^2+x-2>0$

6.103 $x^2+3x+4\ge 0$, $y^2-5y>-10$, $v^2+v+2\le 0$, $3x^2-3x+7<4$, $x^2+6\ge 1$, $x^2-6>1$

6.104б $\begin{cases} x^2-8\le 0 \\ x^2-6x+5>0 \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$. Не бойтесь появления квадратных корней: с ними тоже нужно уметь работать. Если можно вынести множитель за знак корня, сделайте это. На оси и в ответе записывать **только точные** значения чисел, а приближенные можете держать в уме.

6.105 $\left[\begin{array}{l} x^2-8\le 0 \\ x^2-6x+5>0 \\ \end{array}\right.$

6.107 $\begin{cases} x^2\le 4 \\ x^2>x-1 \end{cases}$ Не допустите ошибку типа: $x\le\pm 2$, - или типа: $x\le 2$, Вам можно решить верхнее уравнение или методом виртуального перебора, или **методом интервала**, или свести всё к модулям: $|x|\le 2$

6.108 $\begin{cases} x^2\le 4 \\ x>x-1 \end{cases}$ Замечание: линейное уравнение решается методом переноса членов из одной части уравнения в другую с последующим делением или с помощью виртьуального перебора.. Результат затем наносится на свою ось.

6.110 $\begin{cases} 4x+x^2\ge x \\ x^2+0{,}5x-1{,}5>0 \end{cases}$ Второе неравенство умножьте почленно на два, чтобы избавиться от десятичных дробей.

6.112 $\begin{cases} y^2-3y-4<0 \\ y^2>0 \\ 16>y^2 \\ y^2+4y+5\le 0 \end{cases}$. Второе неравенство лучше решать виртуально (методом перебора)

6.114 $\begin{cases} y^2-3y-4<0 \\ y^2>0 \\ 16>y^2 \\ y^2+4y+5\ge 0 \end{cases}$

.**6.120** $(x-2)(3x+4)(8-x)(6+2x)\ge 0$

6.121 $-3x(2-x)(x^2-9)(x^2+9)>0$ На два сомножителя здесь можно сократить

6.122

$(t^2+t)(2-t^2)(t-1)(t^2-25)(t^2+1)(t^2-t-2)\ge 0$

$(t^2+t)(2-t^2)(t-1)(t^2-25)(t^2+1)(t^2-t-2)\le 0$

$(t^2+t)(2-t^2)(t-1)(t^2-25)(t^2+1)(t^2-t-2)>0$

$(t^2+t)(2-t^2)(t-1)(t^2-25)(t^2+1)(t^2-t-2)<0$

6.127 $\begin{cases}(2x-1)(3x-2)(5x-7)>0\\ x(x^2-x)(4x-5)\le 0\end{cases}$

6.128 $\dfrac{x}{x-1}\le 1$

6.129 $\begin{cases}\dfrac{x-2}{3x}\ge 3\\ \dfrac{x-2}{3x}>2\end{cases}$

6.130 $\dfrac{-81(x^2-6)}{x(6-x)(x^2+6x)(x^2+6)}<0$

6.132a $\dfrac{(x^2-1)(x+6)}{x(6-x)(x^2+6x)(x^2+6)}\ge 0$

6.135 $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{x-2}$

6.136 $\dfrac{1}{x-1}>x$

6.137 $\begin{cases}x^2>1\\ x^3+4x-5>0\end{cases}$

6.139 $\dfrac{2}{2-x^2}\le 0$ Можно неравенство сначала упростить, приведя его к целому виду.

6.141 $\dfrac{3x-x^2}{-5}>0$

6.142 $\dfrac{-4-x^2}{2x-x^2}\ge 0$

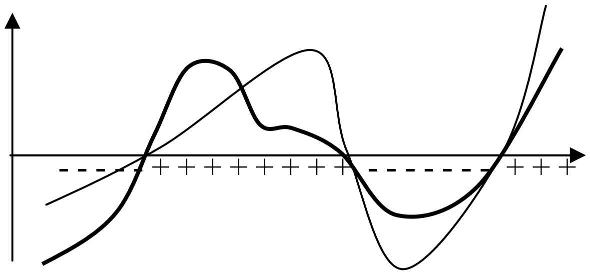
6.143 $-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}<0$

6.145 $\dfrac{x^2}{x^2-1}<0$

6.146 $\begin{cases}\dfrac{1}{2a-4}\ge 0\\ \dfrac{a-2}{a^2+1}\ge 0\end{cases}$

В пределах этой статьи нам полезно ввести временные понятия.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ будем называть **знакоравносильными**, если на ОДЗ они имеют одни и те же нули, одни и те же промежутки знакопостоянства. Говоря короче: на области допустимых значений **знакоравносильные** функции должны принимают одновременно либо положительные, либо отрицательные либо нулевые значения Ниже вы видите графики двух знакоравносильных функций.



Будем эту равносильность обозначать так: $f(x)\overset{\pm 0}{\leftrightarrow} g(x)$.

Если в неравенстве $f(x)a(x)b(x)>0$ заменить $f(x)$ на знакоравносильную $g(x)$, то полученное неравенство $g(x)a(x)b(x)>0$ **равносильно** данному.

Вид сомножителя	Что делать	Например
Знакопостоянный положительный $(+)$	**Сократить**	$125;\ 2^{x-2}$ **Суммы:** (x^2+1); $x^2+3x+8\ (D<0)$; $2^{x-2}+3^x$ $(\sqrt{x-2}+1)$; $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})$; $(\lvert x-2\rvert+1)$; $(\lvert x-2\rvert+\sqrt{x})$ $\begin{cases}\sqrt{x-2}\cdot(........)>0\\ x>3\end{cases}$
$\oplus$	$\oplus\leftrightarrow\oplus^2$ **с учетом ОДЗ**	$\sqrt{x-2}$ $\quad$ $\lvert x-2\rvert$
$\oplus-\oplus$	$\oplus-\oplus\leftrightarrow\oplus^2-\oplus^2$ **с учетом ОДЗ**	$(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$ $(\sqrt{x-2}-1)$ $(\lvert x-2\rvert-\lvert x\rvert)$ $(\lvert x-2\rvert-1)$ **Комбинированные:** $(\lvert x-2\rvert-\sqrt{x})$ **И пр.**
$a^{f(x)}-a^{g(x)}$ $\log_a f(x)-\log_a g(x)$	$\leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))$ **с учетом ОДЗ**	$(2^{x-2}-2^x)$ $(\log_2(x-2)-\log_2 x)$ $(\log_2(x-2)+\log_2 x)=(\log_2(x-2)-\log_2\frac{1}{x})$ $\log_2(x-2)=(\log_2(x-2)-\log_2 1)$

Модули и корни.

1. **Если слагаемые одновременно обращаются в нуль** (например, при x=3)**, то нужно поступить так:** $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+6}$ **типа** $\oplus$ **Но возведение в квадрат не поможет. Выносим общий множитель:** $\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}==\sqrt{\lvert(x-1)(x-3)\rvert}+\sqrt{\lvert(x-2)(x-3)\rvert}$
$=\sqrt{\lvert x-1\rvert\lvert x-3\rvert}+\sqrt{\lvert x-2\rvert\lvert x-3\rvert}=\sqrt{\lvert x-3\rvert}(\sqrt{\lvert x-1\rvert}+\sqrt{\lvert x-2\rvert})$ **С первым сомножителем поступаем как с одиночным корнем** $\oplus$ **, а на второй сомножитель-скобку** $(+)$ **можно сократить.**
Еще пример:
$\lvert x^2-4x+3\rvert+\lvert x^2-5x+6\rvert=\lvert(x-1)(x-3)\rvert+\lvert(x-2)(x-3)\rvert==\lvert x-3\rvert(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert)$
С первым сомножителем поступаем как с одиночным корнем $\oplus$ **, а на второй сомножитель-скобку** $(+)$ **можно сократить.**

РАССМОТРИМ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА:

$$\sqrt{x-2}(x-4)(x+1)(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})|x-1|(|x-1|-1)\le 0$$

Решение:

Запишем требования для ОДЗ

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}(x-4)(x+1)(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})|x-1|(|x-1|-1)\le 0\\ x-2\ge 0\\ x-1\ge 0\\ x\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$$

Поскольку сомножители $\sqrt{x-1}$; $|x-1|$ неотрицательны, то при каждом допустимом значении х они принимают те же знаки, что и их квадраты. Поэтому данные сомножители мы можем заменить их квадратами.

Поскольку разности $(\sqrt{x-1}-2)$; $(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$; $(|x-1|-1)$ – имеют неотрицательные компоненты, то при каждом допустимом значении х они принимают те же знаки, что и разность их квадратов. Поэтому данные сомножители мы можем заменить разностью их квадратов.

Итак, в результате замены получим:

$$\begin{cases}(x-2)(x-4)(x+1)((x-1)-4)(x-(x-1))(x-1)^2((x-1)^2-1)\le 0\\ x\ge 2\\ x\ge 1\\ x\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-4)(x+1)(x-1-4)(x-x+1)(x-1)^2(x-1-1)(x-1+1)\le 0\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-4)(x+1)(x-5)(x-1)^2(x-2)x\le 0\\ x\ge 2\ \ (\Rightarrow x+1>0;\ x-1>0;\ x>0)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-4)(x-5)(x-2)\le 0\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2(x-4)(x-5)\le 0\\ x\ge 2\end{cases}$$

Неравенство представлено в **нормальном** виде – теперь можно приступить к его решению методом интервалов.

Еще пример.

$$\sqrt{x-3,5}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-3,5}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\ge 0\\ x-3,5\ge 0\end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases}(x-3,5)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\ge 0\\ x-3,5\ge 0\end{cases}$$

Неравенство представлено в **нормальном** виде – теперь можно приступить к его решению методом интервалов.

Еще пример:

$$(|x-2|-6)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\geq 0$$

Т.к. $(|x-2|-6)$ есть разность с неотрицательными компонентами, то можно заменить её на $|x-2|^2-6^2$, т.е на $x^2-4x-32$

Получаем: $(x^2-4x-32)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\geq 0$

Неравенство представлено в **нормальном** виде – теперь можно приступить к его решению методом интервалов.

Еще пример: $\sqrt{x-4}(x^2-9)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-4}(x^2-9)>0\\ x-4\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x-4}(x^2-9)>0\\ x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x-4}(x^2-9)>0\\ x-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-9>0\\ x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}0(x^2-9)>0\\ x-4=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-9>0\\ x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\varnothing\\ x=4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(4;+\infty)\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(4;+\infty)$$

Еще пример:

$$\frac{(\log_{x-1}(x^2-2)-\log_{x-1}x)(3^x-9)(3^x+3^{x-1})\lg(x-5)}{2^{x-3}(x^x-1)((\log_x 2+\log_x \frac{1}{x-1})}\geq 0$$

Запишем требования для ОДЗ **по первому неравенству** (без повторов) и сократим на знакопостоянные сомножители (3^x+3^{x-1}) и 2^{x-3}

Затем делаем замену выражений $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ и $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ на $(a-1)(f(x)-g(x))$

$$\begin{cases}\dfrac{(\log_{x-1}(x^2-2)-\log_{x-1}x)(3^x-3^2)(\lg(x-5)-\lg 1)}{(x^x-x^0)((\log_x 2-\log_x(x-1))}\geq 0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\\ x^2-2>0\\ x>0\\ x-5>0\\ x>0\\ x>0\\ x\neq 1\\ x-1\neq 0\\ \dfrac{1}{x-1}>0\\ x^x-1\neq 0 \,\Big|\, x^x-x^0\neq 0\\ \log_x 2+\log_x\dfrac{1}{(x-1)}\neq 0 \,\Big|\, \log_x 2-\log_x(x-1)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x^2-x-2)(3-1)(x-2)(10-1)(x-6)}{(x-1)x(x-1)(3-x)} \geq 0 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0 \\ x > 0 \\ x > 5 \\ x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 1 \\ x-1 > 0 \\ (x-1)x \neq 0 \\ (x-1)(3-x) \neq 0 \end{cases}$$

Заменяем деление умножением, сокращаем постоянные множители, убираем из системы соотношения, являющиеся следствием неравенства $x > 5$.

$$\begin{cases} x(x-2)^3(x+1)(x-6)(x-1)^2(3-x) \geq 0 \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

Второе неравенство также является следствием неравенства $x > 5$. Поэтому:

Имеем: $\begin{cases} (x-6)(3-x) \geq 0 \\ x > 5 \end{cases}$.

Далее либо переходим к методу интервалов, либо продолжаем упрощать за счет сокращения отрицательного при $x > 5$ сомножителя 3–x:

$$\begin{cases} x-6 \leq 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \in (5;6] \right)$$

УПРАЖНЕНИЯ. ВТОРОЙ СЛОЙ

6.147. $(\sqrt{x-4}-2)(x-3)(x-10)\geq 0$ **6.148** $(\sqrt{x-4}-2)(x-3)(x-10)>0$

6.149 $(\sqrt{x-4}-2)(x-3)(x-10)\leq 0$ **6.150** $(\sqrt{x-4}-2)(x-3)(x-10)<0$

6.151 $(|x-1|-2)(x-3)(x-10)<0$ **6.152** $\dfrac{(x^2-3x-4)(5-x)}{\sqrt{x-2}}\leq 0$

6.153 $x^4-3x^2+2\leq 0$ **6.153.2** $(x^4-3x^2+2)(|x|-1)(|x-3|+|x+3|)|x+1|\leq 0$

6.154 $\dfrac{x^2(2x+3)}{5x-1}\leq 0$ **6.155** $\dfrac{x^2(2x+3)}{(5x-1)\sqrt{x-5}}\leq 0$

6.156 $\dfrac{x^2(2x+3)(x^2-x+4)}{(5x-1)(\sqrt{x-5}-1)}\leq 0$ **6.157** $\dfrac{x^2(2x+3)|x|}{(5x-1)(|x|-1)}\leq 0$

6.158 $\dfrac{x^2(2x+3)(\log_2|x|+1)}{(5x-1)(\log_2|x|-1)}\leq 0$ **6.159** $\dfrac{x^2(2x+3)\log_x(x+1)}{(5x-1)(\log_2|x|-1)}\leq 0$

6.160 $\dfrac{3^{x-8}x^2(2x+3)(2^x+1)}{(5x-1)(2^x-1)}\leq 0$ **6.161** $(2x^2-x-3)\sqrt{x+5}\geq 0$

6.162 $(2x^2-x-3)\sqrt{x+5}\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-1\right)\geq 0$ **6.163** $(2x^2-x-3)\sqrt{x+5}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\log_{x+1}(\dfrac{x}{x+2})\geq 0$

6.164 $\dfrac{\lg(x-1)}{(x+1)(x-2)(x^x-x^2)}\geq 0$ **6.165** $\dfrac{\lg(x-1)}{(x+1)(x-2)}\geq 0$

6.166 $(3x-2)^2-4x(2x-3)\geq 0$ **6.167** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-4x}<1{,}5^3$

6.168. $(2x-x^2)\log_{x-1}(x-8)\geq 0$ **6.169** $(2x^2-6)(x+1)\sqrt{x-6}\leq 0$

6.170 $(2x^2-x-3)\sqrt{x+5}\geq 0$

Имеем: $\begin{cases}x+5\geq 0\\(2x^2-x-3)\sqrt{x+5}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\geq 0\\2x^2-x-3\geq 0\end{cases}$ И так далее.

6.171 $\log_{x-1}(x-8)\geq 0$ **6.172.** $\dfrac{x^2+1}{\log_x(x^2-1)}\leq 0$

6.173. $\dfrac{2x-x^2}{\log_2(2x-3)}\leq 0$ **6.174** $\dfrac{2x-x^2}{\log_x(2x-3)}\leq 0$

6.175. $(3x-x^2)\log_{0,5}(x-1)\leq 0$ **6.176** $(3x-x^2)\log_x(x^2-1)\leq 0$

6.177. $\dfrac{\log_2(x-3)}{(5-x)(3+x)}\leq 0$ **6.178.** $\dfrac{(10^{x-1}+1)\log_2(x+1)}{(3-x)|x+2|}\leq 0$

6.179. $\dfrac{10^{x-1}\log_2(x+1)}{(3-x)(2+x)}\leq 0$ **6.180.** $\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{(x+5)|x+2|}\leq 0$

6.181. Найти область определения функции:

$$f(x)=\sqrt{\sin x}$$

6.182. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\ge 0$

6.183. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2$

6.184.

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$$

6.185.

$$\log_{\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|}(2x^2+x-1)\ge\log_{\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|}(11x-6-3x^2)$$

6.186.

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{(5^x-1)(5^x+1)}\le 0$$

6.187.

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{\left|5^x-1\right|}\le 0$$

6.188.

$$\frac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0$$

6.189.

$$\log_{2x+3}x^2<1$$

6.190.

$$\log_{|2x+3|}x^2<1$$

6.191.

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\ge 1$$

6.192.

$$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5(1-x)(x^2-8x-8)$$

6.193

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x\sqrt{3-x})\ge 0$$

6.194

$$\log_{x+1}(19+18x-x^2)-\frac{1}{16}\log_{x+1}{}^2(x-19)^2\ge 2$$

6.195

$$\frac{3^{4-x}(x+10)^x(4-3x)(x^2-3x+3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})\left|x-4\right|(3^{4-x}-1)(\log_x(x+2)+1)}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-1)(\left|x-4\right|-1)(\left|x-4\right|+2)\log_x(x+2)}>0$$

$$\begin{cases} \dfrac{3^{4-x}(x+10)^x(4-3x)(x^2-3x+3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})\left|x-4\right|(3^{4-x}-1)(\log_x(x+2)+1)}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-1)(\left|x-4\right|-1)(\left|x-4\right|+2)\log_x(x+2)}>0 \\ x+10>0 \\ x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ x+4\geq 0, x+4\neq 0 \quad (x+4>0) \\ x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ \sqrt{x+2}\neq\sqrt{x}\ (x\in R) \\ - \\ \sqrt{x+2}\neq 1\ \ (x\neq -1) \\ \left|x-4\right|\neq 1 \quad (x\neq 3, x\neq 5) \\ - \\ - \\ \log_x(x+2)\neq 0 \quad (\log_x(x+2)\neq\log_x 1\Leftrightarrow x+2\neq 1) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(4-3x)\left|x-4\right|(3^{4-x}-1)(\log_x(x+2)+1)}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-1)(\left|x-4\right|-1)\log_x(x+2)}>0 \\ x>0 \\ x\neq 1, x\neq 3, x\neq 5 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-3x)\left|x-4\right|(3^{4-x}-1)(\log_x(x+2)+1)\sqrt{x+4}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-1)(\left|x-4\right|-1)\log_x(x+2)>0 \\ x>0 \\ x\neq 1, x\neq 3, x\neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-3x)(x-4)^2 2(4-x)(x-1)(x+2-\dfrac{1}{x})(x+4)(x+2-x)(x+2-1)((x-4)^2-1)(x-1)(x+1)>0 \\ x>0 \\ x\neq 3, x\neq 5, x\neq 1 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-3x)(x-4)^2(4-x)(x-1)(x+2-\frac{1}{x})(x-1)((x-4)^2-1)>0\\ x>0\\ x\neq 3,\ x\neq 5,\ x\neq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-3x)(x-4)^3(x-1)^2(x-5)(x-3)(x^2+2x-1)<0\\ x>0\\ x\neq 3,\ x\neq 5,\ x\neq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-3x)(x-4)^3(x-1)^2(x-5)(x-3)(x-x_1)(x-x_2)<0\\ x>0\\ x\neq 3,\ x\neq 5,\ x\neq 1\end{cases}$$, где $x_{1;2}=-1\pm\sqrt{2}$

Неравенство представлено в **нормальном** виде – теперь можно приступить к его решению методом интервалов.