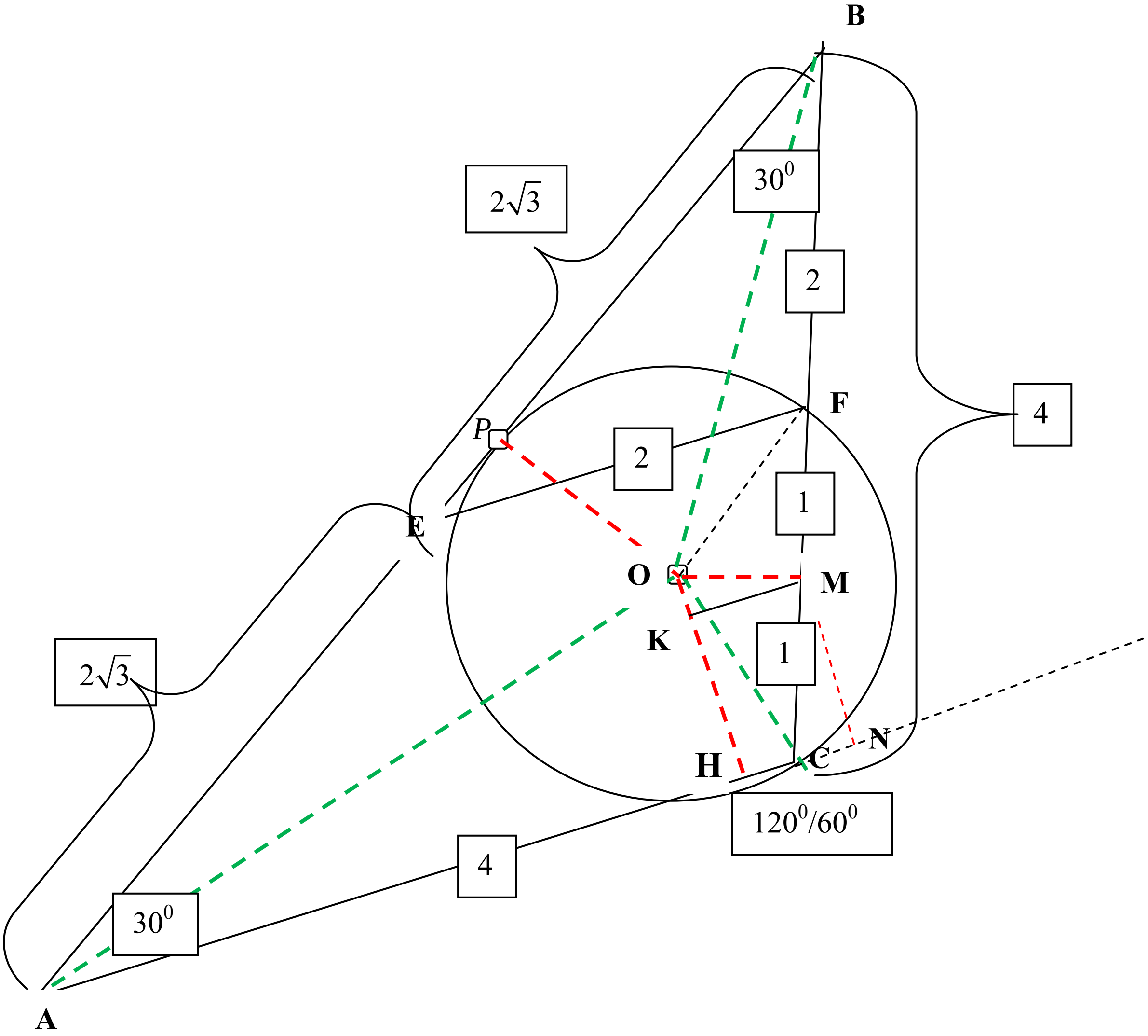
Решить задачу.

В трапеции продолжения боковых сторон пересекаются под углом 30°, один из углов равен 30°, основания равны 2 и 4. Найдите радиус окружности, для которой одна из боковых сторон, или ее продолжение, является касательной и которая проходит через две вершины трапеции.



Первый случай: окружность проходит через точки F и С

Дано:

$AEFC$ - трапеция. $AC \parallel EF$. $B = AE \bigcap CF$.

$AC = 4$, $EF = 2$, $\angle A = 30^0$, $\angle B = 30^0$.

О - центр окружности, проходящей через точки F и С и касающейся прямой АВ в точке P.

М - середина отрезка FC.

$\boxed{AC = 4}$, $\boxed{EF = 2}$ → $\boxed{EF = \frac{1}{2}AC}$, $\boxed{AC \parallel EF}$ → $\boxed{AE = BE,\ CF = BF = \frac{1}{2}BC = \frac{4}{2} = 2}$, $\boxed{\text{М - середина } FC.}$ → $\boxed{CM = FM = 1}$

Имеем: $\angle ACB = 180^0 - (30^0 + 30^0) = 120^0$.

По теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^0 = 32 - 32\left(-\frac{1}{2}\right) = 48$$

Отсюда $AB = 4\sqrt{3}$. Т.к. $AE = BE$, то $AE = BE = 2\sqrt{3}$

O - центр окружности, проходящей через точки F и C

M - середина FC.

→ OM серединный перпендикуляр к CF

$OP = OC = OF$ как радиусы одной окружности. Пусть $OP = OC = OF =$ x.

Тогда OM$=\sqrt{x^2 - 1}$.

Для составления уравнения воспользуемся равенством:

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{ACO}$$

Пусть OH есть перпендикуляр на AC (H – основание перпендикуляра).

Имеем: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 120^0 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot x = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$S_{BCO} = \frac{1}{2} BC \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

$$S_{ACO} = \frac{1}{2} AC \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot OH = 2OH$$

Выразим OH через x:

.

Пусть MK и MN перпендикуляры соответственно на прямые OH и AC (основания перпендикуляров – K и N).

Очевидно, что $KMNH$ - прямоугольник, из чего следует: $KH = MN$.

(1) $\angle MCN = 180^0 - 120^0 = 60^0$ $\angle CMN = 90^0 - 60^0 = 30^0$

(2) $\angle OMK = \min(\angle CMN; 180^0 - \angle CMN)$ – как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Т.е. $\min(30^0; 150^0) = 30^0$

Имеем: $OH = OK + KH = OK + MN = OM \cdot \sin\angle OMK + CM \cdot \sin\angle MCN =$

$$= \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sin 30^0 + 1 \cdot \sin 60^0 = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем полученное значение в уравнение:

$$4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{x^2 - 1} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}}{2}$$

$3\sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{3} \cdot x - 3\sqrt{3} = 0$. Т.е. $\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 1} + 2x - 3 = 0$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 1} = 3 - 2x \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ 3 - 2x > 0 \end{cases} . \begin{cases} x^2 - 12x + 12 = 0 \\ x^2 \geq 1 \\ x < 1,5 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \pm 2\sqrt{6} \\ x^2 \geq 1 \\ x < 1,5 \end{cases}$$

Проверим, удовлетворяет ли $6 + 2\sqrt{6}$ неравенству $x < 1,5$:

$6 + 2\sqrt{6} \wedge 1,5 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \wedge -4,5$ Но $2\sqrt{6} > -4,5$. Значит, $6 + 2\sqrt{6} > 1,5$, что противоречит третьей строчке системы.

Значит, $6 + 2\sqrt{6}$ является посторонним корнем.

Проверим, удовлетворяет ли $6 - 2\sqrt{6}$ неравенству $x < 1,5$:

$6 - 2\sqrt{6} \wedge 1,5 \Leftrightarrow -2\sqrt{6} \wedge -4,5 \Leftrightarrow 4\sqrt{6} \vee 9 \Leftrightarrow 16 \cdot 6 \vee 81 \Leftrightarrow 96 \vee 81$ Но $96 > 81$.

Отсюда: $6 - 2\sqrt{6} < 1,5$. **Значит,** $6 - 2\sqrt{6}$ **удовлетворяет третьей строчке системы.**

Проверим, удовлетворяет ли $(6 - 2\sqrt{6})^2 > 1$ неравенству $x^2 \geq 1$.

$(6 - 2\sqrt{6})^2 \wedge 1 \Leftrightarrow 60 - 24\sqrt{6} \wedge 1 \Leftrightarrow 61 \wedge 24\sqrt{6} \Leftrightarrow 3721 \wedge 3456$. Но $3721 > 3456$.

Значит, $(6 - 2\sqrt{6})^2 > 1$**. Т.е.** $6 - 2\sqrt{6}$ **удовлетворяет неравенству** $x^2 \geq 1$**.**

Проверка закончена.

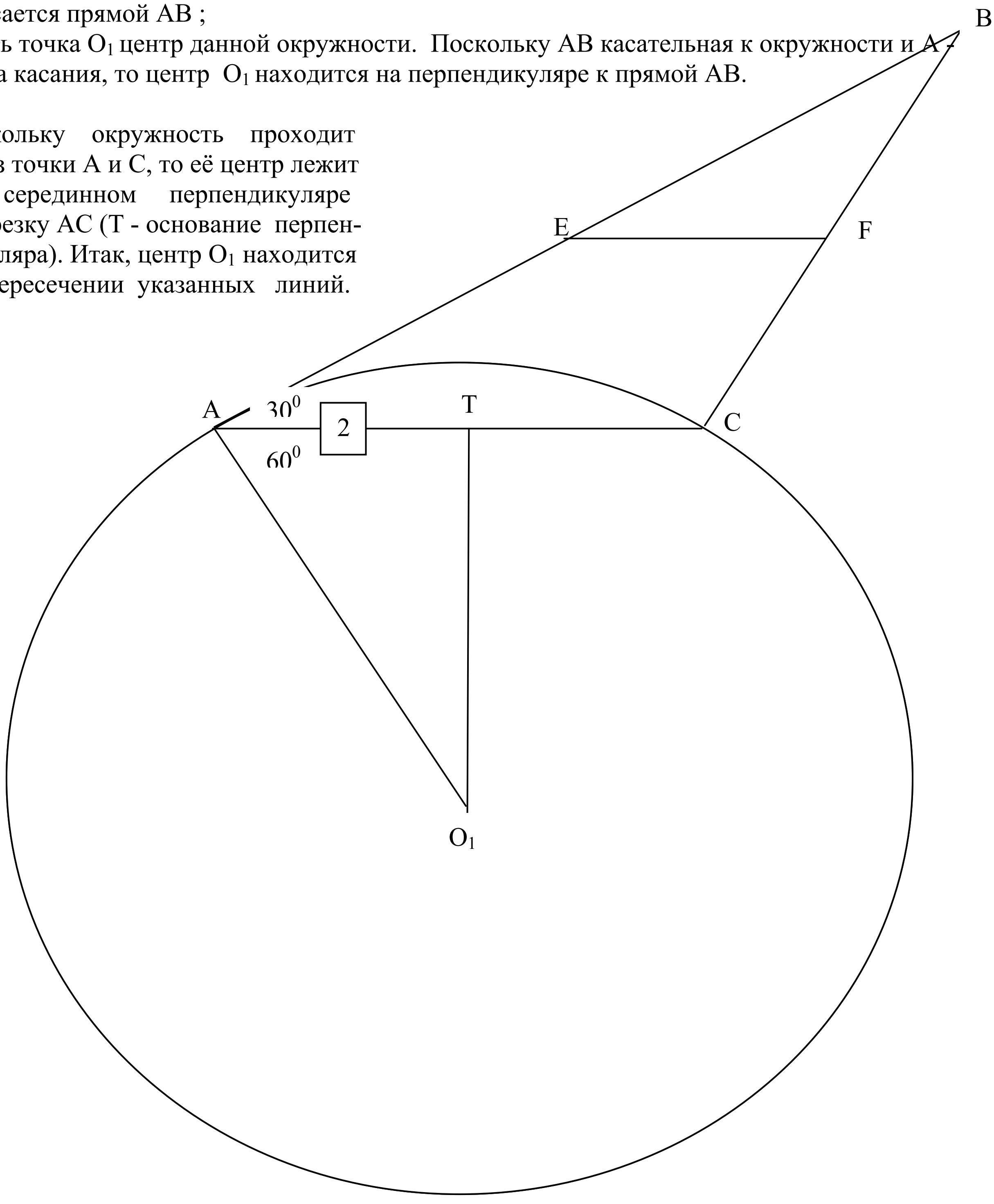
Ответ: радиус окружности равен $6 - 2\sqrt{6}$.

Второй случай: окружность проходит через точки А и Е. Аналогичный способ решения дает ответ: $6(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Третий случай: окружность проходит через точки А и С и касается прямой АВ ;

Пусть точка O_1 центр данной окружности. Поскольку АВ касательная к окружности и А - точка касания, то центр O_1 находится на перпендикуляре к прямой АВ.

Поскольку окружность проходит через точки А и С, то её центр лежит на серединном перпендикуляре к отрезку АС (Т - основание перпендикуляра). Итак, центр O_1 находится на пересечении указанных линий.



На рисунке показан порядок расчета обозначенных углов. Из прямоугольного треугольника ATO_1 следует, что радиус O_1A равен: $O_1A = \dfrac{AT}{\cos 60^0} = \dfrac{2}{0,5} = 4$

Четвертый случай: окружность проходит через точки А и С и касается прямой ВС.

Аналогичные расчеты дают результат: радиус равен $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Аналогично рассматриваются пятый и шестой случаи прохождения окружности через точки E и F .

МОЖНО ЛИ РЕШИТЬ ТАКУЮ ЗАДАЧУ?

На первый взгляд, задача не поддается самостоятельному ученическому решению. Но это только на первый взгляд. На самом деле здесь используются самые основные и далеко не самые сложные приемы решения геометрических задач:

1. Работающий чертеж.
2. Работа с блоками (**блоки будут опубликованы позднее в конспекте "Планиметрия")**
3. Сравнения.
4. Выделение конструкций и параметров
5. Пробные элементарные сдвиги.

Подробнее об этом.

1. Во-первых, все числовые данные и другие соотношения мы заносим **на чертеж**. Это заданные в задаче углы и длины оснований трапеции.

2. Переходим **к блоку "треугольник",** вспоминая все, что дается в этом блоке про треугольник. После этого нетрудно установить, что треугольник ABC равнобедренный и BC равен 4. После чего заданное значение стороны заносится на чертеж.

   Следующий **блок - "трапеция"**. В нем мы вспоминаем про параллельность оснований. **В блоке "параллельность"** мы находим воспоминание о **"подобии треугольников".**

   Зрительное **сравнение** треугольников нам говорит о том же. Сравнение изначальных значений 4 и 2 указывает нам на среднюю линию треугольника ABC. Тот же самый блок "**треугольник**" напоминает о возможности применения теоремы косинусов. И т.д.

   Таким незамысловатым способом заполняется большая область чертежа.

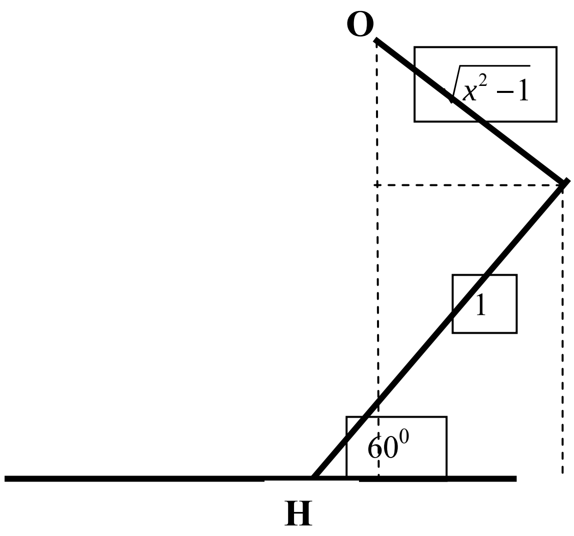
   А как догадаться составить уравнение из площадей?

   Опять же – "блоки". Поскольку нас заинтересовали точки касания, а значит и радиусы, перпендикулярные к ним, то мы переходим **в блок перпендикуляров и высот** и находим здесь всего три указания: площади, теорема Пифагора, координатный метод. Переходя к площадям, мы и связываем наши три перпендикуляра с площадями треугольников - очень распространенный прием.

3. Наконец – проблема вычисления высоты ОН одного из выбранных треугольников. Опять тот же самый блок, но на этот раз мы выбираем **координатный метод**.

   К тому же самому результату можно придти, изучая **путь построения точки О:** АС $\to$СМ $\to$МО. Поэтому переходим **в блок "цепей", в котором тоже речь идет о координатном методе.** Изменяя на небольшие значения величины углов и отрезков, мы видим, что положение точки О определяется тремя переменными параметрами: углом и двумя отрезками. Вот через эти три параметра: 60^0, 1, $\sqrt{x^2-1}$.

   Мы ищем "горизонтальные" и "вертикальные" смещения. В данном случае нам нужны только вертикальные смещения, т.е. смещения перпендикулярные прямой АС. Они и находятся с помощью тригонометрических функций.



ИТАК:

1. Работающий чертеж.
2. Работа с блоками (**блоки будут опубликованы позднее в конспекте "Планиметрия")**
3. Сравнения.
4. Выделение конструкций и параметров
5. Пробные элементарные сдвиги.