А) Найдите сумму чисел 1+4+9+…+4048144

В) Даны числа1;4;9;…;4052169; 2721031819. Докажите, что существует такая расстановка знаков "+" и"–", что полученная сумма будет равна нулю.

РЕШЕНИЕ

А) Общий член суммируемой последовательности: n^2.

Найдем количество членов: $n^2 = 4048144$

Т.е. $n^2 = 4\cdot 1012036 = 4\cdot 4\cdot 253009 = 4\cdot 4\cdot 503^2$

Т.е. $n = 2012$

Представим общий член в виде разности $f(n) - f(n-1)$.

Поскольку общий член есть квадратичная функция, то будем искать f в виде кубической функции.

Рассмотрим функцию n^3.

Будем иметь: $n^3 - (n-1)^3 = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$.

Отсюда $3n^2 = \left(n^3 - (n-1)^3\right) + 3n - 1$. Отсюда $n^2 = \frac{1}{3}\left[\left(n^3 - (n-1)^3\right) + 3n - 1\right]$

Запишем искомую сумму через знак сумматора:

$$\sum_{n=1}^{n=2012} n^2 = \sum_{n=1}^{n=2012} \frac{1}{3}\left[\left(n^3 - (n-1)^3\right) + 3n - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012}\left(n^3 - (n-1)^3\right) + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 3n - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 1$$

Распишем подробнее первый сумматор:

$$\sum_{n=1}^{n=2012}\left(n^3 - (n-1)^3\right) = (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \ldots + (2011^3 - 2010^3) + (2012^3 - 2011^3)$$

Т.е. $\sum_{n=1}^{n=2012}\left(n^3 - (n-1)^3\right) = -0^3 + 2012^3 = 2012^3$

Итак: искомая сумма равна $\frac{1}{3}\cdot 2012^3 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 3n - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 1 =$

$$\frac{1}{3}\cdot 2012^3 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 3n - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n=2012} 1 = \frac{1}{3}\cdot 2012^3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{1+2012}{2}\cdot 2012 - \frac{1}{3}2012 =$$

$= \dfrac{1006(2\cdot 2012^2 + 3\cdot 2013 - 2)}{3} = 2716979650$

ОТВЕТ: 2716979650

В) Общий член суммируемой последовательности: n^2.

Найдем количество членов: $n^2 = 4052169$

Т.е. $n = 2013$

Расставим между числами знаки в такой последовательности: перед последним слагаемым поставим "–", перед всеми предыдущими поставим знак "+".

Тогда сумма всех слагаемых, исключая последнее, будет равна сумме, вычисленной в пункте (А), плюс 2013^2. Т.е. эта сумма равна: 2721031819.

Тогда, суммируя этот результат с последним слагаемым – 2721031819, мы и получим нуль.

Итак, при указанной расстановке знаков условие (В) выполнено.