На интерактивной доске светятся числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{12}$.

a) Докажите, что при любой расстановке знаков «+» или «-» между этими числами вместо запятых полученная сумма не будет равна нулю.

b) Можно ли, стерев некоторое количество чисел, так расставить перед оставшимися числами знаки «+» или «-», чтобы полученная сумма равнялась нулю? Ответ обоснуйте

c) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть, чтобы после некоторой расстановки знаков «+» или «-» перед оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

Есть несколько путей решения: переход к десятичным дробям и разбиение их на конечные, на периодические и дальнейшее разбиение по длине периода у периодической дроби и количества десятичных разрядов у конечной десятичной дроби. Мы выберем второй путь - направление к общему знаменателю.

ИССЛЕДОВАНИЕ:

Для исследования проблем этого задания, рассмотрим более простой смежный пример, в котором даны **несократимые** дроби и знаменатель каждой дроби разложен на простые сомножители. Например, $\frac{5}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 7}-\frac{1}{3^2\cdot 11}+\frac{1}{3^2\cdot 7}$. Обратим внимание на те простые сомножители, которые имеют **максимальный показатель** степени и причем - **в единичном** количестве. Это: 2^3 в первом знаменателе (в остальных знаменателях основание 2 имеет <u>меньшие</u> показатели степеней); 11 в третьем знаменателе (в остальных знаменателях 11 имеет наименьший - нулевой показатель).

Общий знаменатель: $2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11$. А теперь обратим внимание, что **дополнительный множитель над первой дробью** не будет содержать сомножитель 2. В результате после умножения числителя 5 на дополнительный множитель, последний окажется нечетным числом (не кратным числу 2). В то же время все **остальные дополнительные множители** будут содержать хотя бы один сомножитель 2. Т.е. числители остальных дробей окажутся четными числами. В результате сложения-вычитания <u>нечетного</u> числителя с <u>четными</u> числителями итоговый числитель окажется **<u>нечетным</u>**.

Если теперь у нас есть задача, которая спрашивает, может ли отмеченная сумма дробей быть равна несократимой дроби **с четным числителем**, наш ответ будет отрицательным. В частности сумма этих дробей не может быть равна: 0 (четное число), 2, $\frac{4}{9}$ и так далее.

Обратимся к третьей дроби. Её дополнительный множитель не будет содержать сомножителя 11, в то время, как все остальные сомножители будут его содержать. Т.е, по аналогии с предыдущим случаем, в итоговом числителе будем иметь сумму числа <u>не кратного числу 11</u> и чисел, <u>кратных ему</u>. В результате мы получаем, что итоговый числитель **<u>не кратен 11</u>**. В результате наша сумма не может быть равна опять-таки – 0 (он кратен 11), а также $\frac{22}{13}$ и т.д.

После этого небольшого исследования вернемся к нашей задаче.

РЕШЕНИЕ

Из условного ряда $\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5} \pm \frac{1}{6} \pm \frac{1}{7} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} \pm \frac{1}{10} \pm \frac{1}{11} \pm \frac{1}{12}$ будем выбирать **любую группу** слагаемых **с любой расстановкой знаков** + или - перед дробями

Найдем знаменатели **с единственным максимальным показателем** какого-либо простого сомножителя. Получим: $7 = 7^1$; 8= 2^3; 9= 3^2; $11 = 11^1$. Продолжаем:

Сможет ли выбранная группа обратиться в нуль, если она содержит дробь $\frac{1}{7}$?

Дополнительный множитель над дробью $\frac{1}{7}$ не будет содержать сомножителя 7. Остальные дополнительные множители будут его содержать. Поэтому итоговый числитель будет получен в результате сложения числа, <u>не кратного семи</u> с числами, которые <u>кратны семи</u>., т.е. итоговый числитель <u>не будет кратен числу семь</u>, а, следовательно не сможет обратиться в нуль.

Таким образом, во-первых, мы получаем ответ на первую часть задачи: **при любой расстановке знаков + и – отмеченная сумма не будет равна нулю.**

Во-вторых, если среди групп слагаемых и найдется такая сумма, которая равна нулю, то **она не должна содержать дробь** $\frac{1}{7}$

- **Аналогичные результаты мы получаем для дробей** $\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}$.

Итак, искомая сумма не должна содержать дробей $\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}$.

Оставшиеся в ряду $\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5} \pm \frac{1}{6} \pm \frac{1}{10} \pm \frac{1}{12}$ дроби приведем к общему знаменателю: Получим равенство, которое нужно проверить при различных сочетаниях слагаемых и знаков: $\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{15}{60} \pm \frac{12}{60} \pm \frac{10}{60} \pm \frac{6}{60} \pm \frac{5}{60} = 0$

Сгруппируем дроби с "круглыми" числителями в одну сумму, с некруглыми, но в результате сложения дающими круглый числитель во вторую сумму, и все оставшиеся - в третью. Поскольку первая сумма дает результат

$$\left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60} \right) + \left(\pm \frac{15}{60} \pm \frac{5}{60} \right) + \left(\pm \frac{12}{60} \pm \frac{6}{60} \right) = 0$$

Имеем:

$$\left(\pm 60 \pm 30 \pm 20 \pm 10\right) + \left(\pm 15 \pm 5\right) + \left(\pm 12 \pm 6\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) + \left(\pm \frac{15}{60} \pm \frac{5}{60}\right) + \left(\pm \frac{12}{60} \pm \frac{6}{60}\right) = 0$$

- **Первая группа слагаемых дает в результате сложения круглое число**. Для получения числа нуль вторая и третья группы слагаемых **также должны дать круглое число**. Поскольку слагаемое 12 ни при какой комбинации с последними цифрами других слагаемых $\pm 5 \pm 5 \pm 6 \to 6; 4$ не дает на конце нуля, то слагаемое 12 следует стереть. Аналогичным образом придется стереть и 6.

  В результате остается:

$$\left(\pm 60 \pm 30 \pm 20 \pm 10\right) + \left(\pm 15 \pm 5\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) + \left(\pm \frac{15}{60} \pm \frac{5}{60}\right) = 0$$

- **Вторая группа слагаемых верхней строчки может дать четыре круглых числа**: $\pm 10; \pm 20;$

Поэтому получаем два условных ряда:

$$\left(\pm 60 \pm 30 \pm 20 \pm 10\right) \pm 10 = 0 \qquad \left(\pm 60 \pm 30 \pm 20 \pm 10\right) \pm 20 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \text{и} \qquad \Updownarrow$$

$$\left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) \pm \left(\frac{15}{60} - \frac{5}{60}\right) = 0 \qquad \left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) \pm \left(\frac{15}{60} + \frac{5}{60}\right) = 0$$

Итак:

$$\left(\pm 6 \pm 3 \pm 2 \pm 1\right) \pm 1 = 0 \qquad \left(\pm 6 \pm 3 \pm 2 \pm 1\right) \pm 2 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \text{и} \qquad \Updownarrow$$

$$\left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) \pm \left(\frac{15}{60} - \frac{5}{60}\right) = 0 \qquad \left(\pm \frac{60}{60} \pm \frac{30}{60} \pm \frac{20}{60} \pm \frac{10}{60}\right) \pm \left(\frac{15}{60} + \frac{5}{60}\right) = 0$$

Здесь ± 1 на верхней строчке соответствует $\pm\left(\frac{15}{60} - \frac{5}{60}\right)$, а ± 2 соответствует $\pm\left(\frac{15}{60} + \frac{5}{60}\right)$

Выберем сначала общую часть этих рядов:

$$\left(\pm 6 \pm 3 \pm 2 \pm 1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\pm\frac{60}{60}\pm\frac{30}{60}\pm\frac{20}{60}\pm\frac{10}{60}\right)$$

Возьмем наибольшее по модулю число 6 верхней строчки . **ОЧЕВИДНО, ЧТО 6-3-2-1=0.**

Здесь задействованы 4 слагаемых, а, значит и четыре соответствующих им дроби.

А теперь посмотри, что произойдет при добавлении к левой части ± 2, для того чтобы вернуться ко второму условному ряду.

В результате сумма $6-3-2-1$ преобразуется в другую сумму $(6-3-2-1)\pm 2$ с увеличением или уменьшением на 2.

Если мы это компенсируем уменьшением - увеличением суммы $6-3-2-1$ на 2 за счет перераспределения знаков + и –, то результат 0 не изменится.

Поскольку мы собираемся **поменять знаки + и – перед некоторым слагаемым** суммы один на другой, то мы должны учесть, что сумма по модулю изменится **на удвоенный модуль слагаемого**. Т.е. заменив -1 на +1, мы увеличим сумму не на 1, а на два. Итак, компенсируем нашу вычитанием числа 2: **6– 3–2+1-2=0**.

Поскольку –2 соответствует $\left(-\frac{15}{60}-\frac{5}{60}\right)$, то получим:

$$\left(\frac{60}{60}-\frac{30}{60}-\frac{20}{60}+\frac{10}{60}\right)+\left(-\frac{15}{60}-\frac{5}{60}\right)=0$$

Т.е. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=0$

Таким образом, мы получили ответ на второй и третий вопросы задачи: примером суммы равной нулю является среди прочих других вариантов

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}.$$

К тому же это максимальное количество слагаемых, выбранных из первоначального ряда при наименьшем количестве стертых слагаемых, **равном числу 6** с целью получить сумму равную нулю.

Ответ: a) Доказано

b) Доказано примером $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=0$

c) 6.