

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} (3^{\frac{x-5}{3}} - 2)(3\log_3(x-2) - 4) < 0 \\ 3\log_3(x-2) - 3^{\frac{x-5}{3}} > 2 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Пусть:

$$a = 3^{\frac{x-5}{3}} \quad b = 3\log_3(x-2)$$

Имеем:

$$\begin{cases} (a-2)(b-4) < 0 \\ b-a > 2 \end{cases}$$

Далее:

$$\left[\begin{cases} a-2 > 0 \\ b-4 < 0 \\ b > a+2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 2 \\ b < 4 \\ b > a+2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a-2 < 0 \\ b-4 > 0 \\ b > a+2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a < 2 \\ b > 4 \\ b > a+2 \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 2 \\ b < 4 \\ b > a + 2 \quad (a > 2 \Rightarrow a + 2 > 4 \Rightarrow b > 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ b > 4 \\ b > a + 2 \quad (a < 2 \Rightarrow a + 2 < 4 - \text{третья строчка есть следствие второй}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a; b) \in \emptyset \\ a < 2 \\ b > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ b > 4 \end{cases}$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-5}{3}} < 2 \\ 3 \log_3(x-2) > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{x-5}{3}} < 3^{\log_3 2} \\ \log_3(x-2) > \frac{4}{3} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{x-5}{3}} < 3^{\log_3 2} \\ \log_3(x-2) > \log_3 3^{\frac{4}{3}} \end{cases} \stackrel{3>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{x-5}{3} < \log_3 2 \\ x-2 > 3^{\frac{4}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 + 3 \log_3 2 \\ x > 2 + 3\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Произведем сравнение:

$$5 + 3 \log_3 2 \wedge 2 + 3\sqrt[3]{3}$$

Вычтем из обеих частей 2:

$$3 + 3 \log_3 2 \wedge 3\sqrt[3]{3}$$

Сократим на 3 (3 > 0)

$$1 + \log_3 2 \wedge \sqrt[3]{3}$$

Представим левую часть в виде логарифма:

$$\log_3 6 \wedge \sqrt[3]{3}$$

Оценим левую часть десятичными числами с точностью до десятых

$$\text{Т.к. } 1,5^3 = 3,375 \text{ и } 1,4^3 = 2,744, \text{ то } 1,4 < \sqrt[3]{3} < 1,5$$

Сравним логарифмическое выражение левой части сравнения с одной из оценок. Например, с 1,5

$$\log_3 6 \wedge 1,5 \cdot \log_3 3, \text{ т.е. } \log_3 6 \wedge \log_3 3^{1,5}$$

$$\text{Т.к. } 3 > 1, \text{ то } 6 \wedge 3\sqrt[3]{3}.$$

Т.к. обе части неравенства неотрицательны, то после возведения их в квадрат, знак неравенства не изменится:

$$36 \wedge 27$$

$$\text{Но } 36 > 27$$

$$\text{Значит, } 5 + 3\log_3 2 > 2 + 3\sqrt[3]{3}$$

$$\text{Итак: } x \in (2 + 3\sqrt[3]{3}; 5 + 3\log_3 2)$$

$$\text{ОТВЕТ: } (2 + 3\sqrt[3]{3}; 5 + 3\log_3 2)$$