А) Найдите сумму чисел: $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+...+\frac{1}{10712}-\frac{25}{104}$

Б) Даны числа $\frac{1}{4\cdot 5};\frac{1}{5\cdot 6};\frac{1}{6\cdot 7};\frac{1}{7\cdot 8};...;\frac{1}{(n+3)(n+4)};\frac{n}{4n+16};n\in N.$ Докажите, что существует такая расстановка знаков "+" и "–", что полученная сумма будет равна нулю.

РЕШЕНИЕ:

А) Формула общего члена суммы чисел: $\frac{1}{(n+3)(n+4)}$. Найдем количество членов. Для этого решим уравнение: $(n+3)(n+4)=10712$. Т.е. $n^2+7n-10700=0$. В результате решения получаем: $n=100$. Итак:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+...+\frac{1}{10712}-\frac{25}{104}=\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6};+\frac{1}{6\cdot 7};+\frac{1}{7\cdot 8}+...+\frac{1}{103\cdot 104}-\frac{25}{104}$$

Представим каждое слагаемое в виде разности $f(m)-f(m-1)$.

Имеем: $\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$; ... И т.д.

Подставляя в сумму, получим:

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{102}-\frac{1}{103}\right)+\left(\frac{1}{103}-\frac{1}{104}\right)-\frac{25}{104}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные (производя уничтожение), получим:

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{104}\right)-\frac{25}{104}=\frac{26-1}{104}-\frac{25}{104}=0.$$

ОТВЕТ: 0

Б) Поставим между всеми числами знак "+", кроме последнего. Перед последним числом поставим неопределенный знак:

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\pm\frac{n}{4n+16}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим: $\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\pm\frac{n}{4n+16}=\frac{(n+4)-4\pm n}{4n+16}$ **.**

Если на месте знака " $\pm$ **" поставить знак "–", то сумма будет равна нулю, как и требуется по условию задачи. Итак, ответ на вопрос задачи утвердительный (например, последний знак "–", а все остальные "+")**

ОТВЕТ: утверждение доказано.